Autour de la Caractérisation de Raisonnements de Sens Commun en Présence d'Informations Incertaines

Jonathan Ben-Naim

Université d'Aix-Marseille I — U.F.R. de Mathématiques, Informatique et Mécanique
École Doctorale de Mathématiques et d'Informatique de Marseille — E.D. 184
Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille — CNRS UMR 6166

Autour de la Caractérisation de Raisonnements de Sens Commun en Présence d'Informations Incertaines

Thèse

pour l'obtention du grade

Docteur de l'Université d'Aix-Marseille I
Discipline : Informatique

présentée et soutenue publiquement le 28 avril 2006 par

Jonathan Ben-Naim

Rapporteurs :

M. Dov Gabbay	Professeur, King's College
M. Andreas Herzig	Directeur de recherche CNRS, Université Paul Sabatier

Jury :

M. Serge Grigorieff	Professeur, Université Paris 7 (président)
M. Andreas Herzig	Directeur de recherche CNRS, Université Paul Sabatier
M. David Makinson	Professeur, King's College
M. Pierre Marquis	Professeur, Université d'Artois
M. Karl Schlechta	Professeur, Université d'Aix-Marseille I (directeur)

Je suis extrêmement reconnaissant envers mon directeur de thèse Karl Schlechta. Ses idées et techniques, de très bonne qualité, m'ont offert des directions de recherche suffisamment difficiles pour être des défis, tout en restant traitables pendant la durée de la thèse. Je le remercie profondément.

Je remercie aussi beaucoup Arnon Avron et David Makinson pour leurs conseils et critiques constructives qui m'ont aidé à faire des progrès.

Dov Gabbay et Andreas Herzig m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de ma thèse. Je suis très reconnaissant envers eux ainsi qu'envers David Makinson, Pierre Marquis et Serge Grigorieff d'être membres de mon jury.

Merci aussi aux membres de l'équipe Logique et Complexité du LIF. Les discussions (scientifiques et autres) que j'ai eues avec eux ont été très rafraîchissantes.

Enfin, un grand merci à mes parents et à ma chère épouse Sandra. Sa gentillesse et sa patience, avec moi et notre petite Emma, m'ont beaucoup aidé à accomplir ce travail.

Table des matières

Introduction

Relations de conséquence plausibles et paraconsistantes

Dans de nombreuses situations, un agent est confronté à des informations incomplètes et/ou incohérentes et la relation de conséquence classique se montre alors insuffisante. En effet, dans le cas d'informations incohérentes, elle conduit à accepter toute formule comme une conclusion, ce qui revient à perdre l'intégralité de l'information. L'agent a donc besoin d'une autre relation qui conduise à des conclusions non-triviales malgré la présence de contradictions. Ainsi, de nombreuses relations de conséquence paraconsistantes ont été développées, e.g. [Bel77b, Bel77a, Gin88, Sub90a, Sub90b, Pri91, KL92, Loz94, Sub94, BDP95, PH98]. On s'est intéressé en particulier à certaines dites *multi-valuées*, voir e.g. [Bel77b, Bel77a, DdC70, AA94, AA96, AA98, CMdA00, dACM02]. Ces relations sont définies dans un cadre où les interprétations peuvent attribuer plus de deux valeurs de vérité différentes aux formules. En fait, elles tolèrent les contradictions au sein des conclusions, mais rejettent le principe d'explosion selon lequel une seule contradiction devrait entraîner la déduction de toute formule.

Dans le cas d'informations incomplètes, la relation de conséquence classique montre aussi ses limites. En effet, aucun risque n'est pris, les conclusions sont sûres, mais en trop petit nombre. L'agent a souvent besoin de tirer des conclusions plus audacieuses, pas forcément sûres, mais toutefois plausibles. Certaines conclusions trop "hâtives" pourront être rejetées plus tard, en présence d'informations supplémentaires. Pour répondre à ce besoin, de nombreux systèmes non-monotones ont été développés, e.g. la *logique des défauts* de Reiter [Rei80], la *logique autoépistémique* de Moore [Moo85], *la circonscription* de McCarthy [McC80] et *l'hypothèse du monde clos* de Reiter [Rei78]. Ensuite, Gabbay, Makinson, Kraus, Lehmann et Magidor se sont penchés en particulier sur des propriétés (ou postulats, conditions, etc.) intéressantes pour les relations de conséquence non-monotones plausibles, e.g. [Gab85, Mak89, Mak94, KLM90, LM92]. D'autre part, des outils centraux pour définir de telles relations sont les *fonctions de sélection*, voir e.g. [Che54, Arr59, Sen70, AM81, Leh02, Leh01, Sch92b, Sch04]. En effet, supposons que l'on dispose d'une fonction μ, appelée fonction de sélection, qui choisit dans tout ensemble d'interprétations V, les éléments préférés, pas nécessairement au sens absolu, mais quand les interprétations de V sont les seules sont considération. Alors, il est naturel de conclure α (une formule) de Γ (un ensemble de formules) ssi tout modèle de Γ sélectionné par μ est un modèle de α. Cela constitue une relation de conséquence plausible (généralement non-monotone).

Dans cette thèse, on va se concentrer sur deux familles particulières de fonctions de sélection. Présentons la première. Supposons que l'on dispose d'une *relation binaire de préférence $\prec$ sur des états étiquetés par des interprétations* (dans le style de e.g. [KLM90, Sch04]). Cela définit naturellement une fonction de sélection. En effet, choisissons dans tout ensemble d'interprétations V, tout élément étiquetant un état qui est $\prec$-préféré parmi tous les états étiquetés par un élément de V. Les fonctions de sélection qui peuvent être définies de cette manière constituent la première famille. Les relations de conséquence définies par cette famille sont appelées *relation de conséquence préférentielles*.

Passons à la seconde famille. Supposons que certaines interprétations sont considérées comme étant les plus importantes dans l'absolu et regroupons les dans un ensemble $\mathcal{I}$, appelé *pivot*. De nouveau, cela définit naturellement une fonction de sélection. En effet, choisissons dans tout ensemble d'interprétations, simplement les éléments qui appartiennent à $\mathcal{I}$. Les fonctions de sélection définies de cette manière forment la seconde famille et les relations de conséquence définies par cette dernière sont appelées *relations de conséquence pivotantes*. Leur importance a été mise en avant par Makinson dans [Mak03, Mak05], où il montre qu'elles constituent un pont naturel entre la relation de conséquence classique et les relations non-monotones. En effet, elles sont tout à fait monotones, mais dévoilent déjà certains outils (i.e. les fonctions de sélection) des relations non-monotones.

En fait, les relations préférentielles et pivotantes auraient pu être introduites directement par des relations binaires de préférence et des pivots, c'est à dire sans parler des fonctions de sélection (comme cela a été fait historiquement en fait). Un avantage de ces dernières est qu'elles fournissent un cadre uniforme pour présenter ces deux sortes de relations pourtant basées sur des objets très différents. De plus, ce cadre uniforme nous permettra d'appliquer des techniques de preuve similaires dans les deux cas, c'est à dire qu'on travaillera d'abord avec les propriétés qui caractérisent la première famille et ensuite de façon similaire avec celles qui caractérisent la seconde famille.

Pendant longtemps, les recherches sur les relations paraconsistantes d'un côté, et les relations plausibles d'un autre côté, ont été menées séparément. Pourtant, dans de nombreuses applications, les informations sont à la fois incomplètes et incohérentes. Par exemple, le web sémantique ou encore les grandes bases de données contiennent inévitablement des incohérences. Cela peut venir d'erreurs humaines ou matérielles, ou de sources d'information contradictoires. D'autre part, ni le web, ni les grandes bases de données ne peuvent contenir "toute" l'information. En effet, il y a par exemple des règles pour lesquelles on ne pourrait pas énumérer toutes les exceptions. Il y a aussi des informations laissées volontairement vagues ou sous forme concise. En conséquence, des relations à la fois plausibles et paraconsistantes sont utiles pour raisonner dans de telles applications.

De telles relations apparaissent pour la première fois dans e.g. [Pri91, Bat98, KL92, AA00, KM02]. L'idée est de prendre un cadre multi-valué pour obtenir la paraconsistance. Ensuite, seuls les modèles préférés (selon une *relation binaire de préférence sur les interprétations* bien particulière) sont pris en compte pour faire de l'inférence, ce qui fournit la plausibilité (et généralement la non-monotonie aussi). Puis, dans [AL01b, AL01a], Avron et Lev ont généralisé l'étude à des familles de relations binaires de préférence qui comparent deux interprétations en regardant, pour chacune d'elles, cette partie d'un certain ensemble de formules qu'elle satisfait. Cette thèse poursuit cette ligne de recherche en combinant des cadres multi-valués et des fonctions de sélection.

Plus précisément, on va étudier des relations de conséquence préférentielles et pivotantes dans un cadre général. Selon les différentes hypothèses que l'on fera sur ce dernier, il couvrira toutes sortes de cadres dont par exemple le propositionnel classique ainsi que certains multi-valués. Notons que dans ces cadres multi-valués, les relations de conséquence pivotantes et préférentielles conduisent à des conclusions non-triviales malgré la présence de contradictions et sont donc utiles pour traiter des informations à la fois incomplètes et incohérentes. Toutefois, elles n'y satisfont pas le Syllogisme Disjonctif (de α et $\neg\alpha \vee \beta$ on peut conclure β), alors qu'elles le satisfont dans le cadre classique.

De plus, c'est dans les cadres multi-valués que prennent tout leur intérêt de nouvelles relations que l'on va étudier en détail : les relations de conséquence *préférentielles-discriminantes* et *pivotantes-discriminantes*. Elles sont définies comme les versions simples, sauf que parmi les conclusions, on rejette toute formule telle que sa négation est aussi présente. Ce type d'approche a été étudié par exemple dans [BDP95, KM02] (sous le nom d'approche argumentative). Dans le cadre classique, ces relations discriminantes n'apportent rien de bien nouveau. En effet, au lieu de tout conclure à partir d'informations incohérentes, on ne va simplement rien conclure. En revanche, dans les cadres multi-valués, où à partir d'informations incohérentes, les conclusions sont raisonnables, on va rejeter les contradictions parmi elles, les rendant ainsi d'autant plus raisonnables.

La première contribution de cette thèse peut maintenant se résumer en une phrase : on va caractériser dans un cadre général plusieurs (sous-)familles de relations de conséquence pivotantes(-discriminantes) et préférentielles(-discriminantes). Quand les fonctions de sélection considérées satisferont une certaine propriété de *préservation de la définissabilité*, nos caractérisations ne contiendront que des conditions purement syntaxiques. Cela a de nombreux avantages, citons les principaux. Prenons un ensemble de conditions syntaxiques caractérisant une famille de ces relations de conséquence. Cela donne un point de vue syntaxique sur cette famille définie sémantiquement, ce qui permet de la comparer à des conditions présentes sur le "marché" et donc à d'autres relations de conséquence. Cela peut aussi amener à des questions du genre : si on modifie les conditions d'une manière ou d'une autre pour leur donner un aspect plus naturel et élégant, qu'est-ce que l'on obtiendrait du côté sémantique ? Plus généralement, cela peut ouvrir la porte à des questions auxquelles on aurait pas penser autrement ou à des techniques de preuve qui n'aurait pas pu être appliquées dans l'approche sémantique. Enfin, cela peut aider à trouver ou améliorer des systèmes formels basés sur la famille, tels qu'un système de séquents de Gentzen par exemple.

On peut déjà trouver dans la littérature plusieurs caractérisations de relations de conséquence préférentielles (e.g. [KLM90, LM92, Leh02, Leh01, Sch92b, Sch96, Sch00, Sch04]) et pivotantes (e.g. [Rot01, Mak03, Mak05]). On en apportera donc des nouvelles, bien que pour faire ainsi on s'est inspiré des techniques de Schlechta [Sch04]. En fait, notre innovation réside plutôt dans la version discriminante. A notre connaissance, on a accompli le premier travail de caractérisation systématique pour les relations de conséquence préférentielles-discriminantes et pivotantes-discriminantes.

Concernant les autres contributions dans ce domaine, on répondra par la négative à un problème ouvert mis en avant par Makinson. Plus précisément, supposons que $\mathcal{F}$ est un ensemble de formules et $\mathcal{R}$ un ensemble de relations de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Alors, approximativement, une caractérisation de $\mathcal{R}$ est dite *normale* ssi elle ne contient que des conditions quantifiées universellement et de taille au plus $|\mathcal{F}|$ (notons que $|\mathcal{F}|$ peut être infini). On montrera, dans un cadre classique infini, qu'il n'y a pas de caractérisations normales pour la famille de toutes les relations de conséquence pivotantes. Pour cela, on adaptera des techniques que Schlechta avait développé auparavant pour obtenir un résultat similaire sur des relations préférentielles [Sch04]. Enfin, on s'intéressera aux X*-logiques* de Forget, Risch et Siegel [FRS01]. On montrera que la famille de toutes les relations de conséquence pivotantes satisfaisant une certaine propriété d'*univers-codéfinissabilité* est identique à la famille de toutes les X-logiques pour lesquelles X est déductivement clos.

Révision à base de distances

La révision des croyances est un autre type de raisonnement en présence d'informations incertaines. Ce thème aborde la question de savoir comment un agent peut changer son état épistémique courant pour un autre qui est non-trivial et prend en compte une nouvelle information (contredisant éventuellement les anciennes croyances de l'agent). Ce domaine de recherche trouve des applications par exemple dans les systèmes multi-agents, où, approximativement, il se charge de modéliser les états épistémiques des agents (pris individuellement).

Dans [AGM85], Alchourrón, Gärdenfors et Makinson ont proposé une approche à la révision des croyances bien connue maintenant sous le nom d'approche AGM. Un état épistémique y est représenté par un ensemble de formules déductivement clos K et une nouvelle information par une formule α. Un opérateur de révision est alors une fonction qui transforme K et α en un nouvel ensemble de formules déductivement clos (intuitivement, l'état épistémique révisé).

Un des apports de l'approche AGM et qu'elle propose des postulats bien connus que tout opérateur de révision raisonnable devrait satisfaire. Ces postulats ont été défendus par leurs auteurs. Mais, des doutes ont été exprimés à propos de leur "correction" (e.g. [KM92]) et surtout de leur "complétude" (e.g. [FL94, DP94, Leh95, DP97]). En particulier, pour être accepté, un opérateur n'a jamais besoin de mettre un peu de cohérence entre les révisions de deux ensembles différents K et K'. En conséquence, certains opérateurs sont acceptés alors qu'ils ne se comportent pas raisonnablement quand ils sont itérés. Par exemple, prenons trois séquences de révisions qui ne différent qu'à une certaine étape i dans laquelle la nouvelle information est α pour la première séquence, β pour la seconde et $\alpha \vee \beta$ pour la troisième. Supposons maintenant que γ est conclue après la première et la seconde séquence. Alors, on peut s'attendre à ce que γ soit conclue après la troisième séquence aussi. Pourtant, on peut trouver dans [LMS01] un opérateur AGM qui ne satisfait pas cette propriété intuitive.

D'autre part, la modélisation d'un état épistémique par simplement un ensemble de formules déductivement clos a été critiquée par de nombreux chercheurs e.g. [BG93, Bou93, DP97, Wil94, NFPS96]. Dans [Leh95, FH96], on peut trouver des arguments soutenant que cette modélisation n'est pas suffisante dans de nombreuses applications en intelligence artificielle.

Tout cela fournit des motivations pour une autre approche, basée sur des distances entre interprétations, introduite par Lehmann, Magidor et Schlechta [SLM96, LMS01]. Elle conserve le choix AGM de représentation d'un état épistémique, mais elle définie des opérateurs de révision qui se comportent raisonnablement même en cas d'itération. Plus précisément, supposons qu'on dispose d'une distance d sur les interprétations. Cela définit un opérateur $|_d$, appelé *opérateur de distance*, qui transforme tout couple (V, W) d'ensembles d'interprétations en l'ensemble $V|_d W$ de tous les éléments de W les plus proches de V selon d.

Cet opérateur $|_d$ définit à sont tour la révision de K par α comme l'ensemble de toutes les formules satisfaites dans $M_K|_d M_\alpha$ (c'est à dire l'ensemble de tous les modèles de α les plus proches des modèles de K). Ceci constitue un *opérateur de révision basé sur une distance*, intéressant de part son côté naturel et de part son comportement raisonnable même en cas d'itération. Cela vient du fait que les révisions des différents K sont toutes définies par la même distance, ce qui assure une grande cohérence entre elles. Notons que ce n'est pas le cas avec d'autres définitions. Par exemple, avec les systèmes de sphères [Gro88] et les relations d'enracinement épistémique [GM88], la révision de chaque K est définie par sa propre structure, sans aucune "colle" liant les différentes structures.

Dans [LMS01], Lehmann *et al.* ont caractérisé plusieurs familles d'opérateurs de révision basés sur une distance par les postulats AGM plus d'autres qui traitent de la révision itérée. Toutefois, ces derniers postulats comprennent une condition de "boucle" arbitrairement grande. Une question intéressante est de savoir si on peut la remplacer par une autre condition qui elle serait finie. Dans [Sch04], Schlechta a donné des éléments de réponse négative. Plus précisément, supposons que $\mathcal{V}$

est un ensemble d'interprétations et $\mathcal{O}$ un ensemble d'opérateurs binaires sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Alors, approximativement, une caractérisation de $\mathcal{O}$ est dite *S-normale* (i.e. appelée normale par Schlechta) ssi elle ne contient que des conditions finies, quantifiées universellement (comme les postulats AGM) et simples (i.e. n'utilisant que des opérations élémentaires comme $\cup$, $\cap$, $\setminus$). Schlechta a montré que pour plusieurs familles d'opérateurs de distance, il n'y a pas de caractérisations S-normales.

Maintenant, il y a une connexion très forte entre les opérateurs de distance (qui s'appliquent à des interprétations) et les opérateurs de révision basés sur une distance (qui s'appliquent à des formules). On peut raisonnablement penser que le travail de Schlechta puisse être prolongé de sorte à produire des résultats d'impossibilité similaires pour des familles d'opérateurs de révision basés sur une distance. Par exemple, les familles étudiées par Lehmann *et al.* pourraient bien être concernées par cela, ce qui suggère que leur condition de boucle arbitrairement grande ne peut pas être remplacée par une condition finie, simple et quantifiée universellement.

On va étendre le travail de Schlechta dans deux directions. Premièrement, on va considèrer une définition plus générale de la "normalité". Approximativement, une caractérisation de $\mathcal{O}$ sera dite *normale* ssi elle contient seulement des conditions finies et quantifiées universellement, mais pas nécessairement simples (i.e. elles peuvent utiliser des fonctions ou structures complexes, etc., on est pas limité à des opérations élémentaires). On montrera que les familles étudiées par Schlechta n'admettent pas de caractérisations normales (avec notre définition plus large). C'est donc une généralisation des résultats négatifs de Schlechta. Deuxièmement, on va traiter (toujours avec notre définition plus large) de nouvelles familles d'opérateurs de distance, en particulier, certaines respectant la distance de Hamming. Notons que l'on fournira ces résultats dans un cadre très général couvrant toutes sortes de cadres (classiques, multi-valués, etc.).

Bien qu'ils soient négatifs, ces résultats aident à comprendre les limites de ce qui peut être fait dans cette région. Ils ont donc un intérêt en soi. Maintenant, on est tout à fait confiant que ce travail puisse être prolongé comme celui de Schlechta de sorte à montrer des théorèmes d'impossibilité similaires pour des opérateurs de révision basés sur une distance. Seulement, on couvrira plus de familles et avec une définition plus large de la normalité. Ceci constitue la principale motivation. D'autre part, comme on travaillera dans un cadre général, cette perspective de recherche future est toujours valable si on définit la révision dans un cadre non-classique, par exemple un qui est multi-valué. La révision présenterait alors toutes sortes d'avantages comme celui de pouvoir représenter et réviser des croyances incohérentes. On discutera de cela plus en détail dans la conclusion.

Pour terminer cette introduction, mettons en avant les liens entre les deux parties de cette thèse. Tout comme les logiques paraconsistantes, la révision des croyances est utile pour traiter des informations incohérentes. Toutefois, les approches sont différentes. En particulier, la révision sépare les nouvelles informations des anciennes, alors que pour les logiques paraconsistantes il n'y a que de l'information courante. La révision entretient aussi des liens étroits avec les logiques plausibles non-monotones. En effet, Gärdenfors et Makinson ont montré comment définir une famille de relations non-monotones à partir d'un opérateur de révision et vice versa [Mak89, GM88, G¨88]. L'idée est essentiellement de considérer que β est une conséquence de α ssi la révision d'un K donné par α contient β. Les postulats de la révision d'un côté et ceux du raisonnement non-monotone d'un autre côté ont ainsi été mis en correspondance, via cette équivalence. Les deux parties de cette thèse sont donc liées au niveau des grandes lignes. Mais elles le sont aussi au niveau de la mécanique formelle. En effet, qu'il s'agisse de fonctions de sélection ou d'opérateurs de distance, l'idée est toujours de diminuer le nombre de modèles à considérer. Enfin, dans chacune des deux parties on travaillera dans un cadre très général couvrant au moins les cadres classiques et multi-valués.

Structure de la thèse

Dans le chapitre 1 (début de la partie I), on rappellera des systèmes non-monotones conçus pour tirer des conclusions plausibles à partir d'informations incomplètes : la logique des défauts de Reiter, la logique autoépistémique de Moore et la circonscription de McCarthy.

Dans le chapitre 2, on introduira les définitions fondamentales de la partie I. Plus précisément, dans la section 2.1, on introduira un cadre de travail très général. Nous verrons qu'il couvre en particulier les cadres multi-valués des logiques paraconsistantes $\mathcal{J}_3$ et $\mathcal{FOUR}$. Dans la section 2.2, on présentera les fonctions de sélection. On verra quelles propriétés caractérisent les fonctions de sélection définissables par une relation binaire de préférence sur des états étiquetés par des interprétations. De même, on verra cela pour les pivots. Dans la section 2.3, on définira les relations de conséquence préférentielles(-discriminantes) et on donnera des exemples dans des cadres classiques et multi-valués. On rappellera aussi une caractérisation importante qui fait intervenir le système $\mathbf{P}$ de Kraus, Lehmann et Magidor. Dans la section 2.4, on définira les relations de conséquence pivotantes(-discriminantes) et on donnera à nouveau des exemples dans différents cadres.

Dans les chapitres 3 et 4, on fournira dans un cadre général, plusieurs caractérisations de relations de conséquence préférentielles(-discriminantes) et pivotantes(-discriminantes). Ces résultats seront disposés dans quatre catégories en fonction de de la version considérée (simple ou discriminante) et de la propriété de préservation de la définissabilité (satisfaite ou non).

Dans le chapitre 5, on définira les caractérisations normales pour un ensemble de relations de conséquence, c'est à dire celles qui ne contiennent que des conditions quantifiées universellement et de taille limitée. Ensuite on montrera dans un cadre classique infini, qu'il n'y a pas de caractérisations normales pour la famille de toutes les relations de conséquence pivotantes.

Dans le chapitre 6, on présentera les X-logiques de Forget, Risch et Siegel. Ensuite, on montrera que les relations de conséquence pivotantes qui satisfont la propriété d'univers-codéfinissabilité sont exactement les X-logiques pour lesquelles X est déductivement clos.

Dans le chapitre 7 (début de la partie II), on rappellera l'approche AGM à la révision des croyances. On présentera les postulats d'expansion, de contraction, et de révision, ainsi que les identités de Levi et de Harper. On rappellera aussi deux théorèmes de représentation importants, un avec les relations d'enracinement épistémique de Gärdenfors et Makinson, l'autre avec les systèmes de sphères de Grove.

Dans le chapitre 8, on présentera les pseudo-distances de Lehmann, Magidor et Schlechta. On verra comment on peut les utiliser pour définir naturellement des opérateurs de révision. Ensuite, on rappellera les caractérisations de Lehmann *et al.* qui contiennent une condition de boucle arbitrairement grande.

Dans le chapitre 9, on définira les caractérisations normales pour un ensemble d'opérateurs binaires, c'est à dire celles qui ne contiennent que des conditions finies et quantifiées universellement. Ensuite, on montrera que pour plusieurs familles d'opérateurs de distance (en particulier certaines respectant la distance de Hamming), il n'y a pas de caractérisations normales.

Enfin, je voudrais dire que je suis l'auteur de tous les résultats démontrés dans cette thèse. Voici une liste exhaustive : Les propositions 32, 34, 35, 37, 41, 43, 44, 45 et 47 ont été publiées dans [BN05b] ; les propositions 22, 50, 52, 53, 55, 57, 59, 62 et 67 dans [BN05a] ; et les propositions 84 et 85 dans [BN06].

Première partie

Autour de la Caractérisation de Relations de Conséquence Plausibles et Paraconsistantes

Chapitre 1

Premiers systèmes non-monotones

Parmi les premiers systèmes non-monotones conçus pour tirer des conclusions plausibles à partir d'informations incomplètes, on peut trouver en particulier la logique des défauts de Reiter, la logique autoépistémique de Moore et la circonscription de McCarthy. Présentons les brièvement.

1.1 La logique des défauts

Commençons par la logique des défauts [Rei80]. Il s'agit essentiellement de la logique classique à laquelle on ajoute des *règles des défauts* de la forme suivante : $\frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_n}{\gamma}$. Intuitivement, une telle règle signifie : "si α est vrai et $\beta_1,\ldots,\beta_n$ sont cohérents avec ce qui est connu, alors γ peut être conclue". Pour les besoins de cette courte présentation, il est suffisant de se limiter aux *règles singulières*, c'est à dire celles pour lesquelles $n = 1$. Maintenant, supposons que Γ est un ensemble de formules et D un ensemble de règles des défauts singulières. Alors, (Γ, D) est appelée une *théorie des défauts*. Tournons nous vers les *extensions* de (Γ, D). Supposons que Δ est une ensemble de formules. Alors, $\vdash(\Delta)$ dénote la fermeture classique de Δ et $G(\Delta)$ le plus petit ensemble de formules tel que :

- $\Gamma \subseteq G(\Delta)$,
- $G(\Delta) = \vdash(G(\Delta))$ et
- si $\frac{\alpha:\beta}{\gamma} \in D$, $\alpha \in G(\Delta)$ et $\neg\beta \notin G(\Delta)$, alors $\gamma \in G(\Delta)$.

On dit que Δ est une extension de (Γ, D) ssi $\Delta = G(\Delta)$. Toute extension représente une façon plausible de tirer des conclusions à partir de Γ et des règles des défauts de D.

La logique des défauts présente certains inconvénients. L'un d'entre eux est que la propriété de *cumulativité* [Mak89] n'est pas nécessairement satisfaite. Un second inconvénient est qu'une théorie des défauts peut ne pas avoir d'extension. Par exemple, c'est le cas si $\Gamma = \emptyset$ et $D = \{\frac{:\neg\beta}{\beta}\}$. Reiter a exhibé une classe particulière de théories des défauts pour laquelle il y a toujours au moins une extension. Présentons la. Une règle des défauts singulière $\frac{\alpha:\beta}{\gamma}$ est dite *normale* ssi β est équivalent à γ. Une théorie des défauts est dite normale ssi elle ne contient que des règles normales, auquel cas elle possède au moins une extension.

D'autre part, il y a différentes façons de voir le rôle que doivent jouer les règles des défauts, ce qui conduit à différents avis sur des propriétés comme e.g. la *semi-monotonie* [Rei80] ou encore le "*commitment to assumptions*" [Poo89].

Tout cela a conduit à différentes variantes de la logique des défauts. Parmi elles, on peut trouver : la *logique des défauts contrainte* [Sch92a, DSJ95], la *logique des défauts cumulative* [Bre91], la *logique des défauts justifiée* [Łuk88] et la *logique des défauts rationnelle* [MT95]. Toutefois, Delgrande et Schaub ont démontré que toutes ces variantes peuvent déjà être construites dans le cadre original de la logique de défauts [DS03, DS05].

Reiter et Criscuolo ont étudié des théories des défauts *semi-normales* [RC81]. Une règle singulière $\frac{\alpha:\beta}{\gamma}$ est dite *semi-normale* ssi β implique γ. Une théorie des défauts est dite semi-normale ssi elle contient seulement des règles semi-normales. De telles théories sont intéressantes car elles permettent d'éviter certains aspects contre-intuitifs de la *transitivité*. Voici un exemple : les vieux ordinateurs pentium sont rares (au moins aujourd'hui). D'autre part, les choses rares sont généralement chères. Donc, par transitivité, les vieux pentiums sont chers, ce qui est bien sûr faux.

Touretzky, Poole, Froidevaux et Kayser ont pris en compte des priorités entre règles des défauts [Tou87, Poo85, FK88]. Terminons avec Lin, Shoham, Siegel et Schwind qui ont développé une sémantique modale pour la logique des défauts [LS90, Sie90, SS91].

1.2 La logique autoépistémique

La logique autoépistémique de Moore [Moo85] a pour but de formaliser le raisonnement lorsque celui-ci porte sur des connaissances à propos de connaissances. Plus précisément, alors que la logique classique ne peut exprimer que des faits, la logique autoépistémique peut exprimer de la connaissance (ou un manque de connaissance) à propos de ces faits. Moore a développé cette logique comme une reconstruction de la logique non-monotone de McDermott et Doyle [MD80, McD82], pour éviter certaines particularités de cette dernière.

La partie syntaxique de la logique autoépistémique étend celle de la logique classique par un connecteur modal unaire $\Box$. Intuitivement, $\Box\alpha$ signifie : "on croit que α est vraie". Une formule typique est e.g. $(\neg\Box\neg\alpha) \to \alpha$, qui signifie : "si on ne croit pas que α est fausse, alors on suppose que α est vraie". Ceci constitue une sorte d'hypothèse du monde clos. Un autre exemple est $(\Box\alpha \wedge \neg\Box\neg\beta) \to \beta$, qui signifie : "si on croit que α est vraie et si on ne croit pas que β est fausse, alors on suppose que β est vraie".

Supposons que Γ est un ensemble de formules comme les deux exemples ci-dessus. Moore a introduit les *expansions stables* de Γ. Un ensemble de formules Δ est une expansion stable de Γ ssi

$$\Delta = \{\alpha : \Gamma \cup \{\Box\beta : \beta \in \Delta\} \cup \{\neg\Box\beta : \beta \notin \Delta\} \vdash \alpha\}.$$

Intuitivement, Δ est un bon candidat pour représenter les croyances d'un agent introspectif idéal sur la base de Γ. C'est d'autant plus vrai que Δ satisfait les trois *conditions de stabilité* suivantes :

$(S1)$ si $\Delta \vdash \alpha$, alors $\alpha \in \Delta$;

$(S2)$ si $\alpha \in \Delta$, alors $\Box\alpha \in \Delta$;

$(S3)$ si $\alpha \notin \Delta$, alors $\neg\Box\alpha \in \Delta$.

Konolige et Truszczyński ont montré que les expansions stables de la logique autoépistémique sont intimement liées aux extensions de la logique des défauts [Kon88, Tru91].

Terminons avec une remarque intéressantes sur les *théories stables*, c'est à dire les ensembles de formules qui satisfont $(S1)$, $(S2)$ et $(S3)$. Toute théorie stable T contient les schémas d'axiomes suivants :

K $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$;

T $\Box\alpha \to \alpha$;

4 $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$;

5 $\neg\Box\alpha \rightarrow \Box\neg\Box\alpha$.

De plus, T contient toutes les tautologies et est clos sous les règles suivantes :

Nécessité $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$;

Modus Ponens $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$.

En conséquence, tout théorème de la logique modale $S5$ appartient à T. En fait, Moore a montré que l'intersection de toutes les théories stables est exactement l'ensemble de tous les théorèmes de $S5$ [Moo84].

1.3 La circonscription

La circonscription a été proposée pour la première fois par John McCarthy [McC80, McC86]. Elle a pour but de formaliser l'hypothèse naturelle que les choses sont normales (ou se comportent normalement) à moins que le contraire ne soit explicitement spécifié. Par exemple, si Tweety est un oiseau et si rien n'est dit sur la (non-)normalité de Tweety, alors on supposera que Tweety est un oiseau normal et donc qu'il vole (car tous les oiseaux normaux volent).

La circonscription formalise cet exemple de la manière qui suit. Tout d'abord, la situation est représentée par l'ensemble Φ de formules du premier-ordre suivant :

$\forall\, x, (oiseau(x) \wedge \neg anormal(x)) \rightarrow vole(x)$;

$oiseau(Tweety)$.

Ensuite, l'idée est de se restreindre aux modèles de Φ où l'extension du prédicat $anormal$ est minimale dans un certain sens. Autrement dit, $anormal$ est “circonscrit”. Seulement, dans ces modèles sélectionnés, $anormal(Tweety)$ n'est pas satisfait (ce qui n'aurait pas été le cas bien sûr si $anormal(Tweety)$ était spécifié dans Φ). Ceci nous permet de tirer la conclusion plausible (et rétractable) : $vole(Tweety)$, comme désiré.

Plus généralement, supposons que Φ est un ensemble de formules du premier-ordre (représentant ce qui est connu du domaine d'intérêt, i.e. des faits, des règles, etc.), que P est un ensemble de prédicats (représentant les exceptions de certaines règles) et que Z est aussi un ensemble de prédicats (représentant les conclusions de ces règles). Pour se fixer les idées, dans l'exemple de Tweetty, $P = \{anormal\}$ et $Z = \{vole\}$. Il est standard d'appeler les éléments de P les prédicats à minimiser et d'appeler les éléments de Z les prédicats à faire varier. Maintenant, considérons la relation binaire de préférence $\prec$ sur les modèles du premier-ordre définie de la manière qui suit. Supposons que σ et σ' sont deux modèles du premier-ordre. Alors, $\sigma \prec \sigma'$ ssi

- σ et σ' ont le même domaine ;
- σ et σ' sont identiques dans l'interprétation des constantes, symboles de fonction et symboles de prédicat qui n'appartiennent ni à P, ni à Z ;
- $\forall\, p \in P$, l'extension de p dans σ est un sous-ensemble de l'extension de p dans σ' ;
- $\exists\, p \in P$, l'extension de p dans σ est un sous-ensemble strict de l'extension de p dans σ'.

Comme de coutume, un modèle σ de Φ est $\prec$-minimal ssi il n'y a pas de modèle σ' de Φ tel que $\sigma' \prec \sigma$. Approximativement, dans les modèles $\prec$-minimaux de Φ, les prédicats de P ne seront pas satisfaits (à moins que le contraire ne soit spécifié dans Φ, bien sûr), ce qui entraîne que les prédicats de Z auront plus tendance à être satisfaits. A présent, seuls les modèles $\prec$-minimaux de Φ seront pris en compte pour tirer des conclusions à partir de Φ. Intuitivement, cela revient à appliquer les règles tout en ignorant leurs exceptions (sauf celles qui sont explicitement spécifiées), ce qui conduit à tirer des conclusions plausibles et rétractables.

Cette forme d'inférence minimale est équivalente à la circonscription du second-ordre [Lif85]. La définition originale de McCarthy est plutôt syntaxique que sémantique, c'est à dire que la restriction des modèles est forcée par l'ajout d'une formule du second ordre. Par exemple, supposons que Φ est fini, $P = \{p\}$, $Z = \emptyset$ et que l'arité de p est 1. Alors, la formule du second-ordre en question est :

$$(\bigwedge \Phi) \wedge \forall\, p', \neg[(\bigwedge \Phi)[p/p'] \wedge (\forall\, x,\ p'(x) \rightarrow p(x)) \wedge \neg(\forall\, x,\ p(x) \rightarrow p'(x))]$$

où p' est un prédicat d'arité 1, $\bigwedge \Phi$ est la conjonction des formules de Φ et $(\bigwedge \Phi)[p/p']$ est la formule obtenue en remplaçant, dans cette conjonction, p par p'.

Dans la version originale de la circonscription, i.e. la circonscription du premier-ordre, la restriction des modèles est forcée par l'ajout de formules du premier-ordre générées par un certain "schéma de circonscription". Par exemple, supposons que Φ est fini, $P = \{p\}$, $Z = \{q\}$ et que p et q ont pour arité 1. Alors, le schéma de circonscription est :

$$\neg[(\bigwedge \Phi)[p/p', q/q'] \wedge (\forall\, x, p'(x) \rightarrow p(x)) \wedge \neg(\forall\, x, p(x) \rightarrow p'(x))]$$

où p' et q' sont des nouveaux prédicats d'arité 1. En fait, les modèles $\prec$-minimaux de Φ ne seront pas les seuls à rester après l'ajout de ces formules du premier-ordre. En réalité, les modèles restants sont exactement ceux qui sont $\prec'$-minimaux, où $\prec'$ est la relation binaire de préférence telle que $\sigma \prec' \sigma'$ ssi $\sigma \prec \sigma'$ et (approximativement) pour tout prédicat r dans $P \cup Z$, l'extension de r dans σ peut être syntaxiquement décrite dans σ' (voir e.g. [Bes88, Bra88] pour les détails).

Chapitre 2

Définitions fondamentales

Ce chapitre introduit les définitions fondamentales de la partie I.

2.1 Les structures sémantiques

2.1.1 Définitions et hypothèses

Nous travaillerons avec des formules, des interprétations et une relation de satisfaction très généraux. Une approche similaire a été adoptée dans deux articles bien connus [Mak05, Leh01].

Définition 1 On dit que $\mathcal{S}$ est une *structure sémantique* ssi $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ où $\mathcal{F}$ est un ensemble, $\mathcal{V}$ un ensemble et $\models$ une relation de $\mathcal{V} \times \mathcal{F}$.

Intuitivement, $\mathcal{F}$ est un ensemble de formules, $\mathcal{V}$ un ensemble d'interprétations pour ces formules et $\models$ une relation de satisfaction pour ces objets (i.e. $v \models \alpha$ signifie que la formule α est satisfaite dans l'interprétation v, i.e. v est un modèle de α).

Notation 2 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ et $V \subseteq \mathcal{V}$. Alors,
$M_\Gamma := \{v \in \mathcal{V} : \forall\, \alpha \in \Gamma, v \models \alpha\}$,
$T(V) := \{\alpha \in \mathcal{F} : V \subseteq M_\alpha\}$,
$\mathbf{D} := \{V \subseteq \mathcal{V} : \exists\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}, M_\Gamma = V\}$.
Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les formules bien formées (fbfs) de $\mathcal{L}$. Alors,
$T_d(V) := \{\alpha \in \mathcal{F} : V \subseteq M_\alpha$ et $V \not\subseteq M_{\neg\alpha}\}$,
$T_c(V) := \{\alpha \in \mathcal{F} : V \subseteq M_\alpha$ et $V \subseteq M_{\neg\alpha}\}$,
$\mathbf{C} := \{V \subseteq \mathcal{V} : \forall\, \alpha \in \mathcal{F}, V \not\subseteq M_\alpha$ ou $V \not\subseteq M_{\neg\alpha}\}$.

Intuitivement, M_Γ est l'ensemble de tous les modèles de Γ et $T(V)$ est l'ensemble de toutes les formules satisfaites dans V. Chaque élément de $T(V)$ appartient soit à $T_d(V)$, soit à $T_c(V)$, selon que sa négation est aussi présente dans $T(V)$. $\mathbf{D}$ est l'ensemble de tous les ensembles d'interprétations définissables par un ensemble de formules et $\mathbf{C}$ est l'ensemble de tous les ensembles d'interprétations qui ne satisfaisont pas à la fois une formule et sa négation. Comme de coutume, $M_{\Gamma,\alpha}$, $T(V, v)$, etc. sont des raccourcis pour respectivement $M_{\Gamma\cup\{\alpha\}}$, $T(V \cup \{v\})$, etc.

Remarque 3 Les notations M_Γ, $T(V)$, etc. devraient contenir la structure sémantique sur laquelle elles sont basées. Pour augmenter la lisibilité, on omettra cela. Il n'y aura pas d'ambiguïtés. On omettra par la suite des choses similaires dans d'autres notations, pour la même raison.

Une structure sémantique définit une relation de conséquence basique :

Notation 4 On note $\mathcal{P}$ l'opérateur construisant l'ensemble des parties d'un ensemble.
Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique.
On note $\vdash$ la relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}$,

$$\Gamma \vdash \alpha \text{ ssi } M_\Gamma \subseteq M_\alpha.$$

Soit $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Alors,
$\mid\!\sim(\Gamma) := \{\alpha \in \mathcal{F} : \Gamma \mid\!\sim \alpha\}$.
Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$ et $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$.
Alors, on dit que Γ est *consistant* ssi $\forall\, \alpha \in \mathcal{F}$, $\Gamma \not\vdash \alpha$ ou $\Gamma \not\vdash \neg\alpha$.
On aura parfois besoin de parler de la relation de conséquence basique au sens de Scott :
$\Vdash$ dénote la relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{P}(\mathcal{F})$ telle que $\forall\, \Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$,

$$\Gamma \Vdash \Delta \text{ ssi } \forall\, v \in M_\Gamma,\ \exists\, \alpha \in \Delta,\ v \in M_\alpha.$$

Les faits suivants sont triviaux, on les utilisera implicitement dans la suite :

Remarque 5 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$. Alors :
$M_{\Gamma,\Delta} = M_\Gamma \cap M_\Delta$;
$\vdash(\Gamma) = T(M_\Gamma)$;
$M_\Gamma = M_{\vdash(\Gamma)}$;
$\Gamma \subseteq \vdash(\Delta)$ ssi $\vdash(\Gamma) \subseteq \vdash(\Delta)$ ssi $M_\Delta \subseteq M_\Gamma$.

Parfois, on aura besoin de faire certaines hypothèses sur une structure sémantique :

Définition 6 Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique.
Alors, considérons les hypothèses suivantes :
$(A0)$ $M_\mathcal{F} = \emptyset$;
$(A1)$ $\mathcal{V}$ est fini.
Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$. Alors, considérons l'hypothèse suivante :
$(A2)$ $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}$, si $\alpha \notin T(M_\Gamma)$ et $\neg\alpha \notin T(M_\Gamma)$, alors $M_\Gamma \cap M_\alpha \nsubseteq M_{\neg\alpha}$.
Supposons que $\vee$ et $\wedge$ sont des connecteurs binaires de $\mathcal{L}$. Alors, considérons l'hypothèse suivante :
$(A3)$ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}$, on a :
$M_{\alpha\vee\beta} = M_\alpha \cup M_\beta$;
$M_{\alpha\wedge\beta} = M_\alpha \cap M_\beta$;
$M_{\neg\neg\alpha} = M_\alpha$;
$M_{\neg(\alpha\vee\beta)} = M_{\neg\alpha\wedge\neg\beta}$;
$M_{\neg(\alpha\wedge\beta)} = M_{\neg\alpha\vee\neg\beta}$.

Clairement, ces hypothèses sont satisfaites par les structure sémantiques classiques, i.e. les structures où $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ et $\models$ sont classiques. De plus, comme nous le verrons dans les sections 2.1.2 et 2.1.3, elles sont aussi satisfaites par des structures sémantiques multi-valuées.

2.1.2 La structure sémantique définie par $\mathcal{FOUR}$

La logique $\mathcal{FOUR}$ a été introduite par Belnap dans [Bel77a, Bel77b]. Cette logique est utile pour traiter des informations incomplètes. Plusieurs présentations sont possibles, cela dépend du langage considéré. Pour les besoins de cette thèse, un langage propositionnel classique sera suffisant. La logique $\mathcal{FOUR}$ a été étudiée intensivement dans e.g. [AA94, AA96, AA98], où des langages plus riches qu'ici sont considérés. Ils contiennent notamment un connecteur d'implication spécial $\supset$ (introduit pour la première fois par Avron [Avr91]) qui n'est pas l'implication matérielle.

Notation 7 On note $\mathcal{A}$ un ensemble de symboles propositionnels (ou atomes).
On note $\mathcal{L}_c$ le langage propositionnel classique contenant $\mathcal{A}$, les contantes standards $faux$ et $vrai$, et les connecteurs standards $\neg$, $\vee$ et $\wedge$.
On note $\mathcal{F}_c$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}_c$.

Rappelons une interprétation possible de la logique $\mathcal{FOUR}$ (de plus amples détails peuvent être trouvés dans e.g. [CLM99, Bel77a, Bel77b]). Imaginons un système dans lequel il y a d'un côté des sources de information, et d'un autre côté, un processeur d'information qui les écoute. Les sources ne peuvent donner de l'information que sur les atomes, pas sur les formules composées. Pour chaque atome p, il y a exactement quatre possibilités : soit le processeur est informé (par les sources prisent comme un tout) que p est vrai, soit il est informé que p est faux, soit il est informé des deux, soit il n'a aucune information sur p.

Notation 8 On note 0 et 1 les valeurs de vérité classiques et on en définit de nouvelles de la manière suivante :
$\mathbf{f} := \{0\}$; $\mathbf{t} := \{1\}$; $\top := \{0, 1\}$; $\bot := \emptyset$.

L'information globale que les sources donnent au processeur peut être formalisée par une fonction s de $\mathcal{A}$ dans $\{\mathbf{f}, \mathbf{t}, \top, \bot\}$. Intuitivement, $1 \in s(p)$ signifie que le processeur est informé que p est vrai, tandis que $0 \in s(p)$ signifie que le processeur est informé que p est faux.

Ensuite, à partir de s, le processeur construit naturellement de l'information sur les formules composées. Avant qu'il ne commence à le faire, la situation peut être modélisée par une fonction v de $\mathcal{F}_c$ dans $\{\mathbf{f}, \mathbf{t}, \top, \bot\}$ qui s'accorde avec s sur les atomes et qui attache $\bot$ à toutes les formules composées. Maintenant, prenons p et q dans $\mathcal{A}$ et supposons que $1 \in v(p)$ ou $1 \in v(q)$. Alors, le processeur ajoute naturellement 1 à $v(p \vee q)$. De même, si $0 \in v(p)$ et $0 \in v(q)$, alors il ajoute 0 dans $v(p \vee q)$. Bien sûr, des règles similaires sont aussi appliquées pour $\neg$ et $\wedge$.

Supposons que ces règles sont appliquées récursivement à toutes les formules composées. Alors, v représente l'information "complète" (ou développée) donnée par les sources au processeur. En fait, les interprétations de la logique $\mathcal{FOUR}$ sont exactement les fonctions qui peuvent être définies comme v à partir d'un système source-processeur quelconque. Plus formellement,

Définition 9 On dit que v est une *interprétation 4-valuée* ssi v est une fonction de $\mathcal{F}_c$ dans $\{\mathbf{f}, \mathbf{t}, \top, \bot\}$ telle que $v(vrai) = \mathbf{t}$, $v(faux) = \mathbf{f}$ et $\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}_c$,
$1 \in v(\neg\alpha)$ ssi $0 \in v(\alpha)$;
$0 \in v(\neg\alpha)$ ssi $1 \in v(\alpha)$;
$1 \in v(\alpha \vee \beta)$ ssi $1 \in v(\alpha)$ ou $1 \in v(\beta)$;
$0 \in v(\alpha \vee \beta)$ ssi $0 \in v(\alpha)$ et $0 \in v(\beta)$;
$1 \in v(\alpha \wedge \beta)$ ssi $1 \in v(\alpha)$ et $1 \in v(\beta)$;

$0 \in v(\alpha \wedge \beta)$ ssi $0 \in v(\alpha)$ ou $0 \in v(\beta)$.
On note $\mathcal{V}_4$ l'ensemble de toutes les interprétations 4-valuées.

De manière équivalente, on peut définir les interprétations 4-valuées comme les fonctions qui satisfont les tables 1, 2 et 3 ci-dessous :

$v(\alpha)$	$v(\neg\alpha)$
f	**t**
t	**f**
$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$

Table 1.

$v(\alpha) \backslash v(\beta)$	**f**	**t**	$\top$	$\bot$
f	**f**	**t**	$\top$	$\bot$
t	**t**	**t**	**t**	**t**
$\top$	$\top$	**t**	$\top$	**t**
$\bot$	$\bot$	**t**	**t**	$\bot$

$v(\alpha \vee \beta)$
Table 2.

$v(\alpha) \backslash v(\beta)$	**f**	**t**	$\top$	$\bot$
f	**f**	**f**	**f**	**f**
t	**f**	**t**	$\top$	$\bot$
$\top$	**f**	$\top$	$\top$	**f**
$\bot$	**f**	$\bot$	**f**	$\bot$

$v(\alpha \wedge \beta)$
Table 3.

Dans la logique $\mathcal{FOUR}$, une formule α est considérée comme étant satisfaite ssi le processeur est informé qu'elle est vraie, peu importe qu'il soit ou non aussi informé qu'elle est fausse.

Notation 10 On note $\models_4$ la relation de $\mathcal{V}_4 \times \mathcal{F}_c$ telle que $\forall\, v \in \mathcal{V}_4, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}_c$, on a
$v \models_4 \alpha$ ssi $1 \in v(\alpha)$.

Des systèmes formels pour les relations de conséquences $\vdash$ et $\Vdash$ basées sur la structure sémantique $(\mathcal{F}_c, \mathcal{V}_4, \models_4)$ (i.e. la structure sémantique définie par $\mathcal{FOUR}$) peuvent être trouvés dans e.g. [AA94, AA96, AA98]. En voici un :

Axiomes :

$$\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \alpha$$

$$\Gamma, \neg vrai \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, vrai$$

$$\Gamma, faux \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg faux$$

Règles :

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\neg\alpha}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \vee \beta)}$$

Notons que la structure sémantique définie par $\mathcal{FOUR}$ satisfait $(A0)$ et $(A3)$. De plus, si $\mathcal{A}$ est fini, alors $(A1)$ est aussi satisfaite. Cependant, $(A2)$ n'est pas satisfaite. Dans la section 2.1.3, on présente une structure sémantique qui satisfait $(A2)$.

2.1.3 La structure sémantique définie par J_3

La logique J_3 a été introduite pour la première fois dans [DdC70] pour répondre à une question posée en 1948 par Jaśkowski, qui s'intéressait à la systématisation de théories capables de contenir des contradictions. Le passage entre le raisonnement informel avec des contradictions et le raisonnement formel avec des bases de données a été fait dans [CMdA00, dACM02], où une autre formulation de J_3, appelée **LFI1**, a été introduite. On y trouve aussi une version du premier-ordre de cette logique, accompagnée d'une étude au niveau de la théorie des modèles et aussi au niveau de la théorie de la preuve. D'autres recherches poussées ont été menées sur J_3, par exemple dans [Avr91], où des langages plus riches que notre $\mathcal{L}_c$ sont considérés.

On peut donner à la logique J_3 la même interprétation que pour $\mathcal{FOUR}$, sauf qu'on se restreint au systèmes sources-processeur où les sources, prisent comme un tout, donnent toujours de l'information à propos d'un atome. Plus formellement,

Définition 11 On dit que v est une *interprétation 3-valuée* ssi v est une fonction de $\mathcal{F}_c$ dans $\{\mathbf{f}, \mathbf{t}, \top\}$ telle que $v(vrai) = \mathbf{t}$, $v(faux) = \mathbf{f}$ et $\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}_c$,
$1 \in v(\neg\alpha)$ ssi $0 \in v(\alpha)$;
$0 \in v(\neg\alpha)$ ssi $1 \in v(\alpha)$;
$1 \in v(\alpha \vee \beta)$ ssi $1 \in v(\alpha)$ ou $1 \in v(\beta)$;
$0 \in v(\alpha \vee \beta)$ ssi $0 \in v(\alpha)$ et $0 \in v(\beta)$;
$1 \in v(\alpha \wedge \beta)$ ssi $1 \in v(\alpha)$ et $1 \in v(\beta)$;
$0 \in v(\alpha \wedge \beta)$ ssi $0 \in v(\alpha)$ ou $0 \in v(\beta)$.
On note $\mathcal{V}_3$ l'ensemble de toutes les interprétations 3-valuées.

On peut aussi définir les interprétations 3-valuées comme les fonctions qui satisfont les tables 4, 5 et 6 ci-dessous :

$v(\alpha)$	$v(\neg\alpha)$
$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$
$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$
$\top$	$\top$

Table 4.

$v(\alpha \vee \beta)$	$v(\beta)$: $\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\top$
$v(\alpha)$: $\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\top$
$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t}$
$\top$	$\top$	$\mathbf{t}$	$\top$

Table 5.

$v(\alpha \wedge \beta)$	$v(\beta)$: $\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\top$
$v(\alpha)$: $\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}$
$\mathbf{t}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{t}$	$\top$
$\top$	$\mathbf{f}$	$\top$	$\top$

Table 6.

A présent, penchons nous sur la relation de satisfaction de cette logique :

Notation 12 On note $\models_3$ la relation de $\mathcal{V}_3 \times \mathcal{F}_c$ telle que $\forall\, v \in \mathcal{V}_3, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}_c$, on a
$v \models_3 \alpha$ ssi $1 \in v(\alpha)$.

Des systèmes formels pour les relations de conséquence $\vdash$ et $\Vdash$ basées sur la structure sémantique $(\mathcal{F}_c, \mathcal{V}_3, \models_3)$ (i.e. la structure sémantique définie par J_3) ont été fournis dans e.g. [Avr91, DdC70] et le chapitre IX de [Eps90]. On rappelle le suivant :

Axiomes :

$$\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta, \alpha \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \neg\alpha$$

$$\Gamma, \neg vrai \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, vrai$$

$$\Gamma, faux \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg faux$$

Règles :

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg\neg\alpha \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\neg\alpha}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \wedge \beta)}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta}$$

$$\frac{\Gamma, \neg\alpha, \neg\beta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \neg(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\alpha \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg(\alpha \vee \beta)}$$

La structure sémantique définie par J_3 satisfait $(A0)$, $(A3)$ et $(A2)$. De plus, si $\mathcal{A}$ est fini, alors elle satisfait aussi $(A1)$.

2.2 Les fonctions de sélection

2.2.1 Définitions et propriétés

Dans de nombreuses situations, un agent peut déterminer, pour tout ensemble d'interprétations V, les éléments de V qui sont préférés (les plus importants, les plus normaux, etc.), pas forcément au sens absolu, mais quand les interprétations de V sont les seules sous considération. Dans le domaine du choix social, ceci est formalisé par une fonction de sélection [Che54, Arr59, Sen70, AM81, Leh02, Leh01] :

Définition 13 Soient $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$, $\mathbf{W} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$ et μ une fonction de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$.
On dit que μ est une *fonction de sélection* ssi $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\mu(V) \subseteq V$.

De nombreuses propriétés ont été mises en évidence par les chercheurs en choix social. Présentons deux des propriétés les plus importantes. Supposons que W est un ensemble d'interprétations, V un sous-ensemble de W et $v \in V$ une interprétation préférée de W. Alors, on peut s'attendre à ce que v soit une interprétation préférée de V. En effet, dans de nombreuses circonstances, plus un ensemble est grand, plus il est difficile de faire partie de ses éléments préférés, et celui qui peut le plus peut le moins. Cette propriété apparaît dans [Che54] et a reçu le nom de "cohérence" dans [Mou85].

Tournons nous vers la seconde propriété. Supposons que W est un ensemble d'interprétations, V un sous-ensemble de W et supposons que toutes les interprétations préférées de W appartiennent à V. Alors, elles doivent compter parmi elles toutes les interprétations préférées de V. L'importance de cette propriété a été mise en valeur dans [Aiz85, AM81]. Elle a reçu le nom de "monotonie locale" dans e.g. [Leh01].

Définition 14 Soient $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$, $\mathbf{W} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$ et μ une fonction de sélection de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$.
On dit que μ est *cohérente* ssi $\forall\, V, W \in \mathbf{V}$,

$$\text{si } V \subseteq W, \text{ alors } \mu(W) \cap V \subseteq \mu(V).$$

On dit que μ est *localement monotone* (LM) ssi $\forall\, V, W \in \mathbf{V}$,

$$\text{si } \mu(W) \subseteq V \subseteq W, \text{ alors } \mu(V) \subseteq \mu(W).$$

En plus de leurs justifications intuitives, ces propriétés sont intéressantes car elles caractérisent les fonctions de sélection qui peuvent être définies par une relation binaire de préférence sur des états étiquetés par des interprétations (dans le style de e.g. [KLM90, Sch04]). Cela a été démontré par Schlechta dans [Sch00]. De plus amples détails seront donnés dans la section 2.2.2.

Quand on dispose d'une structure sémantique et d'une fonction de sélection sur les interprétations, deux nouvelles propriétés peuvent être définies. Chacune véhicule une idée simple et naturelle.

Définition 15 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique, $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$, $\mathbf{W} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$ et μ une fonction de sélection de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$.
On dit que μ *préserve la définissabilité* (PrD) ssi

$$\forall\, V \in \mathbf{V} \cap \mathbf{D},\ \mu(V) \in \mathbf{D}.$$

Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$.
On dit que μ *préserve la cohérence* (PrC) ssi

$$\forall\, V \in \mathbf{V} \cap \mathbf{C},\ \mu(V) \in \mathbf{C}.$$

La préservation de la définissabilité a été mise en valeur pour la première fois dans [Sch92b]. Un de ses avantages est que quand les fonctions de sélection considérées la satisferont, alors on produira des caractérisations contenant seulement des conditions syntaxiques.

Un intérêt de la préservation de la cohérence est que si les fonctions de sélection la satisfont, alors on aura pas besoin de l'hypothèse $(A2)$ pour démontrer des caractérisations (dans le cas discriminant).

On fournit maintenant des propriétés qui caractérisent les fonctions de sélection définissables par un pivot (dans le style de e.g. [Mak03, Mak05]). Un pivot est un ensemble fixe d'interprétations considérées comme étant les plus importantes dans l'absolu. Nous verrons cela en détail dans la section 2.2.3.

Définition 16 Soient $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$, $\mathbf{W} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$ et μ une fonction de sélection de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$.
On dit que μ est *fortement cohérente* (FC) ssi $\forall\, V, W \in \mathbf{V}$,

$$\mu(W) \cap V \subseteq \mu(V).$$

Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ est une structure sémantique et $\mathcal{V} \in \mathbf{V}$.
On dit que μ est *univers-codéfinissable* (UC) ssi

$$\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V}) \in \mathbf{D}.$$

En plus de lier les fonctions de sélection aux pivots, la propriété d'univers-codéfinassabilité permet d'établir une connexion avec les X-logiques de [FRS01]. Nous verrons cela dans le chapitre 6.

2.2.2 Structures préférentielles

Des relations binaires de préférence sur des interprétations ont été utilisées par Hansson afin de construire une sémantique pour la logique déontique [Han69]. Shoham les a utilisées pour la première fois afin de donner une sémantique à des logiques non-monotones [Sho88, Sho87]. Ensuite, il semble qu'Imielinski est l'une des premières personnes à s'être servi de relations binaires de préférence sur des états étiquetés par des interprétations afin de fournir une sémantique plus générale pour des logiques non-monotones [Imi87, KLM90, LM92, Sch92b, Sch96, Sch00, Sch04]. On encapsulera ce genre de relations dans ce que l'on appelle une structure préférentielle :

Définition 17 On dit que $\mathcal{R}$ est une structure préférentielle sur un ensemble $\mathcal{V}$ ssi $\mathcal{R} = (\mathcal{S}, l, \prec)$ où $\mathcal{S}$ est un ensemble, l une fonction de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{V}$ et $\prec$ une relation de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

En fait, les structures préférentielles sont identiques aux structures de Kripke. La différence réside dans le sens donné à $\prec$. Dans une structure de Kripke, $\prec$ est vu comme une relation d'accessibilité, tandis que dans une structure préférentielle, $\prec$ est vu comme une relation de préférence.

Rappelons une interprétation possible d'une structure préférentielle. Intuitivement, $\mathcal{V}$ est un ensemble d'interprétations pour un langage $\mathcal{L}$ et $\mathcal{S}$ un ensemble d'interprétations pour un langage $\mathcal{L}'$ plus riche que $\mathcal{L}$. Les éléments de $\mathcal{S}$ sont appelés des états. $l(s)$ correspond à cette partie de s qui ne parle que des formules de $\mathcal{L}$. On appelle l une fonction d'étiquetage. Enfin, $\prec$ est une relation de préférence, i.e. $s \prec s'$ signifie que s est préféré à s'.

Penchons nous sur certaines propriétés importantes d'une structure préférentielle.

Définition 18 Supposons que $\mathcal{V}$ est un ensemble, $\mathcal{R} = (\mathcal{S}, l, \prec)$ une structure préférentielle sur $\mathcal{V}$, $T \subseteq \mathcal{S}$, $s \in T$, $V \subseteq \mathcal{V}$ et $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$.
On dit que $\mathcal{R}$ est *transitive* (resp. *irreflexive*) ssi $\prec$ est transitive (resp. irreflexive).
On dit que s est *préféré* dans T ssi $\forall\, s' \in T$, $s' \not\prec s$.
$L(V) := \{s \in \mathcal{S} : l(s) \in V\}$.
On dit que $\mathcal{R}$ est **V**-*smooth* (alias **V**-*stoppered*) ssi $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\forall\, s \in L(V)$,
soit s est préféré dans $L(V)$ ou il existe s' préféré dans $L(V)$ tel que $s' \prec s$.

Intuitivement, $L(V)$ est l'ensemble de tous les états étiquetés par une interprétation de V. Une structure préférentielle définit naturellement une fonction de sélection. L'idée est de choisir dans tout ensemble d'interprétations V, chaque élément étiquetant un état qui est préféré parmi tous les états étiquetés par un élément de V. Plus formellement :

Définition 19 Supposons que $\mathcal{R} = (\mathcal{S}, l, \prec)$ est une structure préférentielle sur un ensemble $\mathcal{V}$.
On note $\mu_{\mathcal{R}}$ la fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, V \subseteq \mathcal{V}$,

$$\mu_{\mathcal{R}}(V) = \{v \in V : \exists\, s \in L(v),\ s \text{ est préféré dans } L(V)\}.$$

Dans [Sch00], Schlechta a montré que la cohérence et la monotonie locale caractérisent les fonctions de sélection qui peuvent être définies par une structure préférentielle. Voyons cela avec la proposition ci-dessous (c'est un corollaire immédiat des propositions 2.4, 2.15 et 1.3 de [Sch00]).

Proposition 20 [Sch00] Soit $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ et μ une fonction de sélection de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$. Alors,

(0) μ est cohérente ssi il existe une structure préférentielle transitive et irreflexive $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{V}$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\mu(V) = \mu_{\mathcal{R}}(V)$.

Supposons que $\forall\, V, W \in \mathbf{V}$, on a $V \cup W \in \mathbf{V}$ et $V \cap W \in \mathbf{V}$. Alors,

(1) μ est cohérente et LM ssi il existe une structure préférentielle $\mathbf{V}$-smooth, transitive et irreflexive $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{V}$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\mu(V) = \mu_{\mathcal{R}}(V)$.

En fait, dans [Sch00], le codomaine de μ est égal à son domaine : $\mathbf{V}$. Cependant cela ne joue aucun rôle dans les preuves. Ainsi, les même preuves (verbatim) sont valables quand le codomaine de μ est un sous-ensemble arbitraire $\mathbf{W}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Schlechta et moi-même avons vérifié cela.

2.2.3 Pivots

Supposons que certaines interprétations sont considérées comme étant les plus importantes au sens absolu. Alors, regroupons les dans un ensemble $\mathcal{I}$, appelé pivot. $\mathcal{I}$ définit naturellement une fonction de sélection $\mu_{\mathcal{I}}$ qui choisit dans tous ensemble d'interprétations, simplement les éléments qui appartiennent à $\mathcal{I}$. Plus formellement :

Définition 21 Soit $\mathcal{V}$ un ensemble.
On dit que $\mathcal{I}$ est un pivot de $\mathcal{V}$ ssi $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{V}$.
Soit $\mathcal{I}$ un pivot de $\mathcal{V}$.
On note $\mu_{\mathcal{I}}$ la fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, V \subseteq \mathcal{V}$,

$$\mu_{\mathcal{I}}(V) = V \cap \mathcal{I}.$$

Les pivots ont été étudiés intensivement par Makinson dans [Mak03, Mak05]. On montre que la cohérence forte, la préservation de la définissabilité et l'univers-codefinissabilité caractérisent les fonctions de sélection qui peuvent être définies par un pivot. Plus précisément :

Proposition 22 Soit $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ et μ une fonction de sélection de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$. Alors :

(0) μ est FC ssi il existe un pivot $\mathcal{I}$ de $\mathcal{V}$ tel que $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\mu(V) = \mu_{\mathcal{I}}(V)$.

Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ est une structure sémantique et $\mathcal{V} \in \mathbf{V}$. Alors :

(1) μ est FC et PrD ssi il existe un pivot $\mathcal{I}$ de $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{I} \in \mathbf{D}$ et $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\mu(V) = \mu_{\mathcal{I}}(V)$;

(2) μ est FC et UC ssi il existe un pivot $\mathcal{I}$ de $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{V} \setminus \mathcal{I} \in \mathbf{D}$ et $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\mu(V) = \mu_{\mathcal{I}}(V)$.

Preuve *Preuve de* (0). Direction : "$\rightarrow$".
Soient $\mathcal{I} = \{v \in \mathcal{V} : \exists\, V \in \mathbf{V}, v \in \mu(V)\}$ et $V \in \mathbf{V}$.
Si $v \in \mu(V)$, alors $v \in V$ et, par définition de $\mathcal{I}$, $v \in \mathcal{I}$.
En conséquence, $\mu(V) \subseteq V \cap \mathcal{I}$.

Si $v \in V \cap \mathcal{I}$, alors $\exists\, W \in \mathbf{V}$, $v \in \mu(W)$, donc, par FC, on a que $v \in \mu(W) \cap V \subseteq \mu(V)$.
En conséquence, $V \cap \mathcal{I} \subseteq \mu(V)$.

Direction : "$\leftarrow$".
Il existe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{V}$ tel que $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\mu(V) = V \cap \mathcal{I}$.
On montre que μ est FC.
Soient $V, W \in \mathbf{V}$. Alors, $\mu(W) \cap V = W \cap \mathcal{I} \cap V \subseteq \mathcal{I} \cap V = \mu(V)$.

Preuve de (1). Direction : "$\rightarrow$".
Prenons le même $\mathcal{I}$ que dans (0).
Alors, par la même preuve (verbatim), $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\mu(V) = V \cap \mathcal{I}$.
Il reste à montrer que $\mathcal{I} \in \mathbf{D}$.
Comme $M_\emptyset = \mathcal{V}$, on a que $\mathcal{V} \in \mathbf{D}$.
Donc, comme μ est PrD, on a que $\mu(\mathcal{V}) \in \mathbf{D}$.
Or, $\mu(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I}$.

Direction : "$\leftarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf qu'en plus $\mathcal{I} \in \mathbf{D}$.
On montre que μ est PrD. Soit $V \in \mathbf{V} \cap \mathbf{D}$.
Alors, $\exists\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $M_\Gamma = V$. De même, comme $\mathcal{I} \in \mathbf{D}$, on a que $\exists\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, $M_\Delta = \mathcal{I}$.
Ainsi, $\mu(V) = V \cap \mathcal{I} = M_\Gamma \cap M_\Delta = M_{\Gamma \cup \Delta} \in \mathbf{D}$.

Preuve de (2). Direction : "$\rightarrow$".
Prenons le même $\mathcal{I}$ que dans (0).
Alors, par la même preuve (verbatim), $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $\mu(V) = V \cap \mathcal{I}$.
Il reste à montrer que $\mathcal{V} \setminus \mathcal{I} \in \mathbf{D}$.
Comme μ est UC, on a que $\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V}) \in \mathbf{D}$.
Or, $\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \setminus (\mathcal{V} \cap \mathcal{I}) = \mathcal{V} \setminus \mathcal{I}$.

Direction : "$\leftarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf qu'en plus $\mathcal{V} \setminus \mathcal{I} \in \mathbf{D}$.
On montre que μ est UC : $\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \setminus (\mathcal{V} \cap \mathcal{I}) = \mathcal{V} \setminus \mathcal{I} \in \mathbf{D}$. ∎

2.3 Relations de conséquence préférentielles(-discriminantes)

2.3.1 Définitions

Supposons qu'on dispose d'une structure sémantique et d'une fonction de sélection μ sur les interprétations. Alors, il est naturel de conclure une formule α d'un ensemble de formules Γ ssi tout modèle de Γ choisi par μ est un modèle de α. Plus formellement :

Définition 23 Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ est une structure sémantique et que $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
On dit que $\mid\!\sim$ est une *relation de conséquence préférentielle* ssi il existe une fonction de sélection cohérente μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}$,

$$\Gamma \mid\!\sim \alpha \text{ ssi } \mu(M_\Gamma) \subseteq M_\alpha.$$

De plus, si μ est LM, PrD, etc., alors $\mid\!\sim$ l'est aussi.

Ces relations de conséquence sont dites “préférentielles” car, à la lumière de la proposition 20, elles peuvent être définies de manière équivalente avec des structures préférentielles, à la place des fonctions de sélection cohérentes. On a opté pour les fonctions de sélections pour deux raisons.

Premièrement, elles transportent un sens plus clair. En effet, des propriétés comme la cohérence ont des justifications intuitives très simples. En revanche, les structures préférentielles comportent des “états”. Or, un état ne représente pas quelque chose de parfaitement clair dans la vie de tous les jours. D'ailleurs, dans [KLM90], Kraus, Lehmann et Magidor ne considèrent pas les structures préférentielles comme des justifications ontologiques pour leur intérêt dans les systèmes formels considérés, mais comme des outils techniques pour les étudier et en particulier régler des questions d'interdérivabilité et trouver des procédures de décision efficaces (voir la fin de la section 1.2 de [KLM90]).

Deuxièmement, grâce aux fonction de sélection, on peut présenter de manière uniforme les relations de conséquence préférentielles (ici) et pivotantes (dans la section 2.4), alors qu'elles sont basées sur des outils très différents (i.e. les structures préférentielles et les pivots). Cela nous permettra en particulier d'appliquer des techniques de preuve similaires pour les deux sortes de relations.

Les relations préférentielles conduisent à des conclusions plausibles qui pourront éventuellement être retirées plus tard, en présence d'informations supplémentaires. Ainsi, elles sont utiles pour traiter des informations incomplètes. On donnera un exemple de cela avec une structure sémantique classique dans la section 2.3.3.

De plus, si une structure sémantique multi-valuée est considérée, alors ces relations conduisent à des conclusions non-triviales même en présence de contradictions et sont donc utiles pour traiter des données à la fois incomplètes et incohérentes. Toutefois, elle ne satisferont pas le syllogisme disjonctif (i.e. de α et $\neg\alpha \vee \beta$ on peut déduire β). On donnera un exemple avec la structure sémantique définie par $\mathcal{FOUR}$ dans la section 2.3.4.

A présent, tournons nous vers une variante des relations préférentielles. L'idée est de rejeter les contradictions au sein des conclusions.

Définition 24 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
On dit que $\mid\!\sim$ est une *relation de conséquence préférentielle-discriminante* ssi il existe une fonction de sélection cohérente μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\forall\, \alpha \in \mathcal{F}$,

$$\Gamma \mid\!\sim \alpha \text{ ssi } \mu(M_\Gamma) \subseteq M_\alpha \text{ et } \mu(M_\Gamma) \not\subseteq M_{\neg\alpha}.$$

De plus, si μ est LM, PrD, etc., alors $\mid\!\sim$ l'est aussi.

Si une structure sémantique classique est considérée, alors la version discriminante n'apporte pas grand chose de nouveau. En effet, la seule différence sera de ne rien conclure au lieu de tout conclure quand les informations seront incohérentes. En revanche, si une structure multi-valuée est considérée, les conclusions seront raisonnables même à partir d'informations incohérentes. La version discriminante aura en plus l'avantage d'éliminer les contradictions au sein des conclusions, rendant ces dernières d'autant plus raisonnables.

Dans les définitions 23 et 24, le domaine de la fonction de sélection est $\mathbf{D}$. Ce choix est naturel car seuls les éléments de $\mathbf{D}$ interviennent dans la définition d'une relation de conséquence préférentielle(-discriminante). Ce point de vue est partagé par d'autres auteurs e.g. [Leh01] (voir la section 6). Maintenant, on pourrait désirer que le domaine soit $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ en entier. En fait, plusieurs familles de relations peuvent être définies de manière équivalente avec $\mathbf{D}$ ou $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Par exemple, comme dit dans [Leh01], si μ est une fonction de sélection cohérente de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, alors la fonction μ' de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ définie par $\mu'(V) = V \cap \mu(M_{T(V)})$ est une fonction de sélection cohérente qui s'accorde avec μ sur $\mathbf{D}$.

De nombreuses caractérisations pour les relations de conséquence préférentielles ont été produites, e.g. [KLM90, LM92, Leh02, Leh01, Sch92b, Sch96, Sch00, Sch04]. On rappellera en particulier (dans la section 2.3.2) une caractérisation impliquant le système $\mathbf{P}$ bien connu de [KLM90].

2.3.2 Le système $\mathbf{P}$

Gabbay, Makinson, Kraus, Lehmann et Magidor ont étudié des propriétés intéressantes pour les relations de conséquence non-monotones [Gab85, Mak89, Mak94, KLM90, LM92]. Un certain ensemble particulier de propriétés, appelé le système $\mathbf{P}$, joue un rôle central dans cette région. Il est essentiellement dû à Kraus, Lehmann et Magidor [KLM90] et a été étudié en détail aussi dans [LM92]. Présentons le.

Définition 25 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage contenant les connecteurs usuels $\neg$ et $\vee$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Alors, le système $\mathbf{P}$ est l'ensemble des six conditions suivantes : $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}$,

Reflexivity $\alpha \mid\!\sim \alpha$

Left logical Equivalence $\dfrac{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \quad \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma}$

Right Weakening $\dfrac{\vdash \alpha \rightarrow \beta \quad \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta}$

Cut $\dfrac{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma \quad \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$

Cautious Monotonicity $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$

Or $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \gamma \quad \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma}$

Notons que $\alpha \wedge \beta$ est un raccourci pour $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$. De même, $\alpha \rightarrow \beta$ et $\alpha \leftrightarrow \beta$ sont des raccourcis. Notons aussi que $\mathbf{P}$ sans la règle $\mathbf{Or}$ est appelé $\mathbf{C}$. Le système $\mathbf{C}$ est intimement lié à l'inférence cumulative étudiée par Makinson dans [Mak89]. De plus, il semble correspondre à ce que Gabbay proposa dans [Gab85]. A propos de la règle $\mathbf{Or}$, elle correspond à l'axiome CA de la logique conditionnelle.

Toutes les propriétés de $\mathbf{P}$ sont intuitivement correctes si on lit $\alpha \mid\!\sim \beta$ comme "β est une conséquence plausible de α". De plus, $\mathbf{P}$ est complet dans le sens où il caractérise les relations de conséquence qui peuvent être définies par une structure préférentielle smooth, transitive et irreflexive. C'est ce qui donne à $\mathbf{P}$ son rôle central. Plus précisément :

Définition 26 Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ est une structure sémantique.
Alors, on considère la notation suivante : $\mathbf{D}_f := \{V \subseteq \mathcal{V} : \exists\, \alpha \in \mathcal{F}, V = M_\alpha\}$.
Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage contenant les connecteurs usuels $\neg$ et $\vee$, et $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes

les fbfs de $\mathcal{L}$.
Alors, on définit les conditions suivantes : $\forall\, v \in \mathcal{V}, \forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}, \forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$,

$(KLM0)$ $v \models \neg\alpha$ ssi $v \not\models \alpha$;

$(KLM1)$ $v \models \alpha \vee \beta$ ssi $v \models \alpha$ ou $v \models \beta$.

$(KLM2)$ si pour tout sous-ensemble fini Δ de Γ, on a $M_\Delta \neq \emptyset$, alors $M_\Gamma \neq \emptyset$.

Notons que $(KLM2)$ est appelée “Assumption of Compactness” dans [KLM90].

Proposition 27 [KLM90] Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage contenant les connecteurs usuels $\neg$ et $\vee$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(KLM0)$–$(KLM2)$ et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$.
Alors, $\mid\!\sim$ satisfait toutes les propriétés de $\mathbf{P}$ ssi il existe une structure préférentielle $\mathbf{D}_f$-smooth, transitive et irreflexive $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{V}$ telle que $\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}$, $\alpha \mid\!\sim \beta$ ssi $\mu_{\mathcal{R}}(M_\alpha) \subseteq M_\beta$.

Notons que $\mid\!\sim$ est une relation de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, pas de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Cette différence est cruciale. En effet, si on adapte les conditions de $\mathbf{P}$ de manière évidente à des relations de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ et si on remplace $\mathbf{D}_f$ par $\mathbf{D}$ dans la proposition 27, alors cette dernière n'est plus valide. Ce résultat négatif a été montré par Schlechta dans [Sch92b].

A présent, par les propositions 20 et 27, on obtient immédiatement le théorème de représentation suivant :

Proposition 28 Supposons que la définition 23 (d'une relation de conséquence préférentielle) est adaptée de manière évidente aux relations de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ (essentiellement, on remplace $\mathbf{D}$ par $\mathbf{D}_f$). Supposons aussi que $\mathcal{L}$ est un langage contenant les connecteurs usuels $\neg$ et $\vee$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ et $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(KLM0)$–$(KLM2)$ et telle que $\forall\, V, W \in \mathbf{D}_f$, $V \cup W \in \mathbf{D}_f$ et $V \cap W \in \mathbf{D}_f$.
Alors, les relations de conséquence préférentielles LM sont identiques aux relations qui satisfont le système $\mathbf{P}$.

Rappelons que la propriété LM a été introduite dans la définition 14.

2.3.3 Un exemple dans un cadre classique

Soient $\mathcal{L}$ un langage propositionnel classique dont les atomes sont : r, q et p. On leur donne l'interprétation suivante : r signifie que Nixon est un républicain, q signifie que Nixon est un quaker (religieux généralement pacifistes) et p signifie que Nixon est un pacifiste. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}$ l'ensemble de toutes les interprétations classiques de $\mathcal{L}$ et $\models$ la relation de satisfaction classique pour ces objets. Alors, $\mathcal{V}$ est l'ensemble des 8 interprétations suivantes : v_0,

v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 et v_7, définies de manière évidente par cette table :

	r	q	p
v_0	0	0	0
v_1	0	0	1
v_2	0	1	0
v_3	0	1	1
v_4	1	0	0
v_5	1	0	1
v_6	1	1	0
v_7	1	1	1

Maintenant, considérons la classe de tous les républicains et la classe de tous les quakers. Considérons aussi qu'un républicain est normal ssi ce n'est pas un pacifiste et qu'un quaker est normal ssi c'est un pacifiste. Enfin, considérons qu'une interprétation v est plus normale qu'une interprétation w selon une classe C ssi

- Nixon appartient à C dans v et w ;
- Nixon est normal dans v ;
- Nixon n'est pas normal dans w.

Dans le graphe suivant, il y a une flèche qui part de v et va vers w ssi v est plus normale que w selon au moins une classe :

$$\begin{tikzcd}
 & v_3 \arrow[r] \arrow[dd] & v_2 \\
v_0 & & \\
 & v_6 \arrow[r, shift right] \arrow[dd] & v_7 \arrow[l, shift right] \arrow[uu] \\
v_1 & & \\
 & v_5 & v_4 \arrow[l] \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

En présence de ces considérations, une structure préférentielle naturelle sur $\mathcal{V}$ est $\mathcal{R} = (\mathcal{V}, l, \prec)$, où l est l'identité et $\prec$ la relation telle que $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$, on a $v \prec w$ ssi (1) ou (2) est satisfait (i.e. ssi il existe une flèche de v vers w) :

(1) $v \models r$ et $v \models \neg p$ et $w \models r$ et $w \not\models \neg p$;

(2) $v \models q$ et $v \models p$ et $w \models q$ et $w \not\models p$.

Soit $\mid\!\sim$ la relation de conséquence préférentielle définie par la fonction de sélection cohérente $\mu_{\mathcal{R}}$.

Alors, $\mid\!\sim$ conduit à tirer des conclusions plausibles et à réviser certaines conclusions trop "hâtives" à la lumière d'informations supplémentaires. Par exemple, $r \mid\!\sim \neg p$ et $\{r, p\} \not\mid\!\sim \neg p$ et $q \mid\!\sim p$ et $\{q, \neg p\} \not\mid\!\sim p$.

Toutefois, $\mid\!\sim$ n'est pas paraconsistante. De plus, le traitement de certains ensembles de formules est trivial, parce qu'il n'y a pas de modèles préférés pour eux, bien qu'il y ait des modèles pour eux. Par exemple, $\{q, r\} \mid\!\sim \alpha, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}$.

2.3.4 Un exemple dans le cadre de $\mathcal{FOUR}$

Considérons la structure sémantique de $\mathcal{FOUR}$: $(\mathcal{F}_c, \mathcal{V}_4, \models_4)$ et supposons que $\mathcal{A} = \{r, q, p\}$ (ces objets ont été définis dans la section 2.1.2). De plus, faisons les mêmes considérations à propos de Nixon, des classes, de la normalité, etc., que dans la section 2.3.3, sauf que cette fois une interprétation v est considérée comme étant plus normale qu'une interprétation w selon une classe C ssi

– dans v et w, le processeur est informé que Nixon appartient à C ;
– dans v, il est informé que Nixon est normal et il n'est pas informé du contraire ;
– dans w, il n'est pas informé que Nixon est normal.

Des rappels sur les systèmes sources-processeur peuvent être trouvés dans la section 2.1.2 . Etant donné ces considérations, une structure préférentielle naturelle sur $\mathcal{V}_4$ est $\mathcal{R} = (\mathcal{V}_4, l, \prec)$, où l est l'identité et $\prec$ la relation telle que $\forall\, v, w \in \mathcal{V}_4$, on a $v \prec w$ ssi (1) ou (2) est satisfait (i.e. v est plus normale que w selon au moins une classe) :

(1) $v \models_4 r$ et $v \models_4 \neg p$ et $v \not\models_4 p$ et $w \models_4 r$ et $w \not\models_4 \neg p$;
(2) $v \models_4 q$ et $v \models_4 p$ et $v \not\models_4 \neg p$ et $w \models_4 q$ et $w \not\models_4 p$.

Soit $\mid\!\sim$ la relation de conséquence préférentielle définie par la fonction de sélection cohérente $\mu_{\mathcal{R}}$.

Alors, de nouveau on accepte des conclusions plausibles et on en révise certaines trop hâtives. Par exemple, $r \mid\!\sim \neg p$ et $\{r, p\} \not\mid\!\sim \neg p$ et $q \mid\!\sim p$ et $\{q, \neg p\} \not\mid\!\sim p$.

D'autre part, $\mid\!\sim$ est paraconsistante. En effet, par exemple, $\{p, \neg p, q\} \mid\!\sim p$ et $\{p, \neg p, q\} \mid\!\sim \neg p$ et $\{p, \neg p, q\} \mid\!\sim q$ et $\{p, \neg p, q\} \not\mid\!\sim \neg q$. Et il arrive moins souvent qu'on traite de manière triviale un ensemble qui possède qui modèles. Par exemple, cette fois : $\{q, r\} \mid\!\sim p$ et $\{q, r\} \mid\!\sim \neg p$ et $\{q, r\} \mid\!\sim q$ et $\{q, r\} \not\mid\!\sim \neg q$ et $\{q, r\} \mid\!\sim r$ et $\{q, r\} \not\mid\!\sim \neg r$.

Cependant, $\mid\!\sim$ ne satisfait pas le syllogisme disjonctif. En effet, par exemple, $\{\neg r, r \vee q\} \not\mid\!\sim q$.

2.4 Les relations de conséquence pivotantes(-discriminantes)

2.4.1 Définitions

On se penche à présent sur les relations de conséquence pivotantes. Elles représentent des façons plausibles de tirer des conclusions à partir d'informations incomplètes. A la différence des relations préférentielles, elles sont monotones.

Définition 29 Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
On dit que $\mid\!\sim$ est une *relation de conséquence pivotante* ssi il existe une fonction de sélection FC μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}$,

$$\Gamma \mid\!\sim \alpha \text{ ssi } \mu(M_\Gamma) \subseteq M_\alpha$$

De plus, si μ est UC, PrC, etc., alors $\mid\!\sim$ l'est aussi.

Ces relations sont dites "pivotantes" car, grâce à la proposition 22, on voit qu'elles peuvent être définies de manière équivalente avec des pivots, au lieu des fonctions de sélection FC. Leur importance a été mise en évidence par Makinson dans e.g. [Mak03, Mak05], où il a montré qu'elles constituent un pont naturel entre la relation de conséquence classique et les relations non-monotones. En effet, elles sont tout à fait monotones mais font intervenir certains outils usuels (i.e. les fonctions de sélection) des relations non-monotones. Notons que les relations pivotantes (resp. pivotantes PrD) sont appelées par Makinson "pivotal-valuation relations" (resp. "pivotal-assumption relations"). Un exemple de leur utilité en présence d'informations incomplètes est donné dans la section 2.4.2.

D'autre part, si une structure sémantique multi-valuée est considérée, alors elles conduisent à des conclusions non-triviales même en présence de contradictions et sont donc utiles pour traiter des informations à la fois incomplètes et incohérentes. Toutefois elle ne satisferont pas le syllogisme disjonctif. Nous verrons un exemple dans la section 2.4.3.

Des caractérisations pour les relations de conséquence pivotantes, valides dans des cadres classiques, peuvent être trouvées dans la littérature. Par exemple, celle-ci semble connue depuis longtemps : les relations de conséquence pivotantes PrD correspondent précisément aux opérations de fermeture supraclassiques, compactes et satisfaisant la propriété de "Disjunction in the Premisses" (voir e.g. [Rot01, Mak03, Mak05] pour plus de détails).

De nouveau, on se penche sur une variante capturant l'idée que les contradictions au sein des conclusions doivent être éliminées.

Définition 30 Soit $\mathcal{L}$ un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
On dit que $\mid\sim$ est une *relation de conséquence pivotante-discriminante* ssi il existe une fonction de sélection FC μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}$,

$$\Gamma \mid\sim \alpha \text{ ssi } \mu(M_\Gamma) \subseteq M_\alpha \text{ et } \mu(M_\Gamma) \not\subseteq M_{\neg\alpha}$$

De plus, si μ est UC, PrC, etc., alors $\mid\sim$ l'est aussi.

Comme précédemment, la version discriminante est surtout intéressante dans les cadres multi-valués, car elle y retire de manière non-triviale les contradictions parmi les conclusions.

2.4.2 Un exemple dans un cadre classique

Soit $\mathcal{L}$ un langage propositionnel classique dont les atomes sont : r, q et p. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}$ l'ensemble de toutes les interprétations classiques de $\mathcal{L}$ et $\models$ la relation de satisfaction classique pour ces objets. A présent, faisons les mêmes considérations à propos de Nixon, des classes, de la normalité, etc., que précédemment. En plus, considérons qu'une interprétation est négligeable dans l'absolu ssi (à l'intérieur d'elle) Nixon est un individu non-normal d'au moins une classe. Alors, collectons les interprétations non-négligeables dans un pivot $\mathcal{I}$. Plus formellement :

$$\mathcal{I} = \{v \in \mathcal{V} : \text{si } v \models r, \text{ alors } v \models \neg p \text{ ; si } v \models q, \text{ alors } v \models p\}.$$

Soit $\mid\sim$ la relation de conséquence pivotante définie par la fonction de sélection FC $\mu_{\mathcal{I}}$.

Alors, $\mid\sim$ conduit à des conclusions plausibles. Par exemple, $r \mid\sim \neg p$ et $q \mid\sim p$. Cependant, on se comportera trivialement dès qu'une nouvelle information viendra contredire une conclusion trop hâtive. Par exemple, $\{r, p\} \mid\sim \alpha, \forall\, \alpha \in \mathcal{L}$, et $\{q, \neg p\} \mid\sim \alpha, \forall\, \alpha \in \mathcal{L}$. C'est en quelque sorte le prix à payer pour être monotone, alors que des conclusions plausibles sont acceptées.

D'autre part, $\mid\sim$ n'est pas paraconsistante et traite de manière triviale certains ensembles de formules possédant pourtant des modèles (mais ne possédant pas de modèles dans le pivot). Par exemple, $\{q, r\} \mid\sim \alpha, \forall\, \alpha \in \mathcal{L}$.

2.4.3 Un exemple dans le cadre de $\mathcal{FOUR}$

Considérons la structure sémantique de $\mathcal{FOUR}$: $(\mathcal{F}_c, \mathcal{V}_4, \models_4)$ et supposons que $\mathcal{A} = \{r, q, p\}$. Faisons les mêmes considérations que précédemment à propos de Nixon, des classes, de la normalité, etc., sauf que cette fois une interprétation est considérée comme étant négligeable ssi (à l'intérieur d'elle) le processeur est informé que Nixon appartient à une classe, mais il n'est pas informé que Nixon est un individu normal de cette classe. A nouveau, regroupons les interprétations non-négligeables dans un pivot $\mathcal{I}$. Plus précisément :

$$\mathcal{I} = \{v \in \mathcal{V}_4 : \text{si } v \models_4 r, \text{ alors } v \models_4 \neg p\ ; \text{ si } v \models_4 q, \text{ alors } v \models_4 p\}.$$

Soit $\mid\!\sim$ la relation de conséquence pivotante définie par la fonction de sélection FC $\mu_{\mathcal{I}}$.

Alors, encore une fois, $\mid\!\sim$ conduit à des conclusions plausibles. Par exemple, $r \mid\!\sim \neg p$ et $q \mid\!\sim p$. De plus, bien que les conclusions hâtives ne seront jamais retirées, on ne tombe pas complètement dans la trivialité quand une nouvelle information vient les contredire. Par exemple, $\{r, p\} \mid\!\sim p$ et $\{r, p\} \mid\!\sim \neg p$ et $\{r, p\} \mid\!\sim r$ et $\{r, p\} \not\mid\!\sim \neg r$.

D'autre part, $\mid\!\sim$ est paraconsistante. En effet, par exemple, $\{p, \neg p, q\} \mid\!\sim p$ et $\{p, \neg p, q\} \mid\!\sim \neg p$ et $\{p, \neg p, q\} \mid\!\sim q$ et $\{p, \neg p, q\} \not\mid\!\sim \neg q$. Et moins d'ensembles de formules sont traités trivialement alors qu'ils possèdent des modèles. Par exemple, cette fois : $\{q, r\} \mid\!\sim p$ et $\{q, r\} \mid\!\sim \neg p$ et $\{q, r\} \mid\!\sim q$ et $\{q, r\} \not\mid\!\sim \neg q$ et $\{q, r\} \mid\!\sim r$ et $\{q, r\} \not\mid\!\sim \neg r$.

Cependant, $\mid\!\sim$ ne satisfait pas le syllogisme disjonctif. En effet, par exemple, $\{\neg r, r \vee q\} \not\mid\!\sim q$.

Chapitre 3

Caractérisations de relations de conséquence préférentielles

Dans ce chapitre, on caractérisera des familles de relations de conséquence préférentielles et préférentielles-discriminantes. Ces résultats ont été publiés dans [BN05b]. Parfois on aura besoin de faire certaines hypothèses (définies dans la section 2.1.1) à propos des structures sémantiques sous considération. Cependant, aucune hypothèse ne sera nécessaire pour les trois familles suivantes :

- les relations de conséquence préférentielles (section 3.2) ;
- les relations de conséquence préférentielles PrD (section 3.1) ;
- les relations de conséquence préférentielles PrD et LM (section 3.1).

On supposera $(A1)$ et $(A3)$ pour :

- les relations de conséquence préférentielles-discriminantes PrC (section 3.4) ;
- les relations de conséquence préférentielles-discriminantes PrC et PrD (section 3.3) ;
- les relations de conséquence préférentielles-discriminantes PrC, PrD et LM (section 3.3).

Enfin, on aura besoin de $(A1)$, $(A2)$ et $(A3)$ pour :

- les relations de conséquence préférentielles-discriminantes (section 3.4) ;
- les relations de conséquence préférentielles-discriminantes PrD (section 3.3) ;
- les relations de conséquence préférentielles-discriminantes PrD et LM (section 3.3).

3.1 Le cas non-discriminant et PrD

Les caractérisations de cette section ont déjà été montrées par Schlechta dans la proposition 3.1 de [Sch00] sous l'hypothèse qu'une structure sémantique classique est considérée. En utilisant les mêmes techniques que Schlechta, on va montrer que ses caractérisations sont valables avec n'importe quelle structure sémantique.

Notation 31 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Alors, considérons les conditions suivantes : $\forall\, \Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$,

$(\mid\!\sim 0)$ si $\vdash(\Gamma) = \vdash(\Delta)$, alors $\mid\!\sim(\Gamma) = \mid\!\sim(\Delta)$;

$(\mid\!\sim 1)$ $\vdash(\mid\!\sim(\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$;

$(\mid\!\sim 2)$ $\Gamma \subseteq \mid\!\sim(\Gamma)$;

$(\mid\!\sim 3)$ $\mid\!\sim(\Gamma, \Delta) \subseteq \vdash(\mid\!\sim(\Gamma), \Delta)$;

($\mid\!\sim$4) si $\Gamma \subseteq \vdash(\Delta) \subseteq \mid\!\sim(\Gamma)$, alors $\mid\!\sim(\Gamma) \subseteq \mid\!\sim(\Delta)$.

Notons que ces conditions sont purement syntaxiques si un système formel est disponible pour $\vdash$ (ce qui est le cas avec e.g. les structures sémantiques classiques, de $\mathcal{FOUR}$, et de J_3).

Proposition 32 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Alors,

(0) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence préférentielle PrD ssi ($\mid\!\sim$0), ($\mid\!\sim$1), ($\mid\!\sim$2) et ($\mid\!\sim$3) sont satisfaites ;

(1) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence préférentielle PrD et LM ssi ($\mid\!\sim$0), ($\mid\!\sim$1), ($\mid\!\sim$2), ($\mid\!\sim$3) et ($\mid\!\sim$4) sont satisfaites.

Preuve *Preuve de* (0). Direction : "$\rightarrow$".
Il existe une fonction de sélection cohérente et PrD μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma))$. On montrera que :
(0.0) $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$0) ;
(0.1) $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$1) ;
(0.2) $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$2) ;
(0.3) $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, on a $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\sim(\Gamma)}$;
(0.4) $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$3).
Direction : "$\leftarrow$".
Supposons que $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$0), ($\mid\!\sim$1), ($\mid\!\sim$2) et ($\mid\!\sim$3).
Soit μ la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\sim(\Gamma)}$.
On a que μ est bien définie.
En effet, si $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et $M_\Gamma = M_\Delta$, alors $\vdash(\Gamma) = \vdash(\Delta)$, donc, par ($\mid\!\sim$0), $\mid\!\sim(\Gamma) = \mid\!\sim(\Delta)$.
De plus, μ est clairement PrD. On montrera que :
(0.5) μ est une fonction de sélection ;
(0.6) μ est cohérente ;
(0.7) $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, on a $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma))$.

Preuve de (0.0). Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et $\vdash(\Gamma) = \vdash(\Delta)$.
Alors, $M_\Gamma = M_\Delta$. Donc, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma)) = T(\mu(M_\Delta)) = \mid\!\sim(\Delta)$.

Preuve de (0.1). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors, $\vdash(\mid\!\sim(\Gamma)) = \vdash(T(\mu(M_\Gamma))) = T(M_{T(\mu(M_\Gamma))}) = \mid\!\sim(\Gamma)$.

Preuve de (0.2). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors, $\Gamma \subseteq T(M_\Gamma) \subseteq T(\mu(M_\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$.

Preuve de (0.3). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Comme μ est PrD, on a que $\mu(M_\Gamma) \in \mathbf{D}$.
Donc, $\exists\, \Gamma' \subseteq \mathcal{F}$, $\mu(M_\Gamma) = M_{\Gamma'}$. Ainsi, $\mu(M_\Gamma) = M_{\Gamma'} = M_{T(M_{\Gamma'})} = M_{T(\mu(M_\Gamma))} = M_{\mid\sim(\Gamma)}$.

Preuve de (0.4). Soient $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$.
Comme $M_{\Gamma,\Delta} \subseteq M_\Gamma$ et μ est cohérente, on a que $\mu(M_\Gamma) \cap M_{\Gamma,\Delta} \subseteq \mu(M_{\Gamma,\Delta})$.
Ainsi, $\mid\!\sim(\Gamma, \Delta) = T(\mu(M_{\Gamma,\Delta})) \subseteq T(\mu(M_\Gamma) \cap M_{\Gamma,\Delta}) = T(\mu(M_\Gamma) \cap M_\Delta)$.
Donc, par (0.0), $\mid\!\sim(\Gamma, \Delta) \subseteq T(M_{\mid\sim(\Gamma)} \cap M_\Delta) = T(M_{\mid\sim(\Gamma),\Delta}) = \vdash(\mid\!\sim(\Gamma), \Delta)$.

Preuve de (0.5). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors, $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\sim(\Gamma)} \subseteq M_\Gamma$, par ($\mid\!\sim$2).

Preuve de (0.6). Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et $M_\Gamma \subseteq M_\Delta$.
Alors, $\mu(M_\Delta) \cap M_\Gamma = M_{\mid\sim(\Delta)} \cap M_\Gamma = M_{\mid\sim(\Delta),\Gamma}$.
Or, par $(\mid\sim 3)$, on a que $M_{\mid\sim(\Delta),\Gamma} \subseteq M_{\mid\sim(\Delta,\Gamma)} = \mu(M_{\Delta,\Gamma}) = \mu(M_\Gamma)$.

Preuve de (0.7). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors, par $(\mid\sim 1)$, $\mid\sim(\Gamma) = \vdash(\mid\sim(\Gamma)) = T(M_{\mid\sim(\Gamma)}) = T(\mu(M_\Gamma))$.

Preuve de (1). Direction : "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf qu'en plus μ est LM.
On utilise cela pour montrer que $\mid\sim$ satisfait $(\mid\sim 4)$.
Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et $\Gamma \subseteq \vdash(\Delta) \subseteq \mid\sim(\Gamma)$.
Alors, par (0.3), on a que $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\sim(\Gamma)} \subseteq M_{\vdash(\Delta)} = M_\Delta \subseteq M_\Gamma$.
Ainsi, comme μ est LM, on a que $\mu(M_\Delta) \subseteq \mu(M_\Gamma)$.
Donc, $\mid\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma)) \subseteq T(\mu(M_\Delta)) = \mid\sim(\Delta)$.

Direction : "$\leftarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf qu'en plus $(\mid\sim 4)$ est satisfaite.
On utilise cela pour montrer que μ est LM.
Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_\Delta \subseteq M_\Gamma$.
Alors, $M_{\mid\sim(\Gamma)} \subseteq M_\Delta \subseteq M_\Gamma$. Ainsi, $\Gamma \subseteq T(M_\Gamma) \subseteq T(M_\Delta) = \vdash(\Delta)$.
D'autre part, $\vdash(\Delta) = T(M_\Delta) \subseteq T(M_{\mid\sim(\Gamma)}) = \vdash(\mid\sim(\Gamma))$ ce qui est égal à $\mid\sim(\Gamma)$, par $(\mid\sim 1)$.
Donc, par $(\mid\sim 4)$, on a $\mid\sim(\Gamma) \subseteq \mid\sim(\Delta)$. Ainsi, $\mu(M_\Delta) = M_{\mid\sim(\Delta)} \subseteq M_{\mid\sim(\Gamma)} = \mu(M_\Gamma)$. ∎

3.2 Le cas non-discriminant et pas nécessairement PrD

A présent, on va caractériser la famille de toutes les relations de conséquence préférentielles. A la différence de la section 3.1, nos conditions n'auront pas un aspect purement syntaxique. En fait, on arrive pas à traduire des propriétés comme la cohérence en termes syntaxiques car les fonctions de sélection considérées ne préservent pas forcément la définissabilité. En effet, on ne dispose plus de l'égalité importante : $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\sim(\Gamma)}$, laquelle est d'une grande aide pour faire la traduction et est valide précisément grâce à la préservation de la définissabilité.

Dans la proposition 5.2.11 de [Sch04], Schlechta a fourni une caractérisation de la famille mentionnée plus haut, sous l'hypothèse qu'une structure sémantique propositionnelle classique est considérée. Notons que le travail de Schlechta est fait dans un cadre très général. C'est seulement à la fin qu'il applique ses lemmes généraux dans un cadre classique pour obtenir des caractérisations. Les conditions qu'il a donnés, comme les nôtres, ne sont pas purement syntaxiques (e.g. elles impliquent toujours une notion de modèle, etc.).

Cependant, certaines limites à ce qui peut être fait dans cette région ont été mises en évidence par Schlechta. Approximativement, il a montré dans la proposition 5.2.15 de [Sch04] que dans un cadre classique infini, il n'y a pas de caractérisations contenant seulement des conditions quantifiées universellement, de taille limitée, et simples (i.e. utilisant seulement des opérateurs élémentaires comme e.g. $\cup$, $\cap$, $\setminus$).

Le but de cette section est de produire une nouvelle caractérisation, plus élégante que celle de Schlechta et valide avec n'importe quelle structure sémantique. Pour cela, on s'est inspiré de la partie générale du travail de Schlechta (voir la proposition 5.2.5 de [Sch04]). Techniquement, l'idée est de construire pour toute fonction f, une fonction de sélection cohérente μ_f telle que si f "recouvre" n'importe quelle fonction de sélection cohérente, alors elle recouvre aussi μ_f. Plus formellement :

Définition 33 Soient $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ et f une fonction de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$.
On note μ_f la fonction de $\mathbf{V}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{V}$,

$$\mu_f(V) = \{v \in V : \forall\, W \in \mathbf{V},\ \text{si } v \in W \subseteq V,\ \text{alors } v \in f(W)\}.$$

Lemme 34 Soit $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ et f une fonction de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$.
Alors, μ_f est une fonction de sélection cohérente.

Preuve μ_f est clairement une fonction de sélection. Il reste à montrer qu'elle est cohérente.
Supposons que $V, W \in \mathbf{V}$, $V \subseteq W$ et $v \in \mu_f(W) \cap V$. On montre que $v \in \mu_f(V)$.
Pour cela, supposons le contraire, i.e. supposons que $v \notin \mu_f(V)$.
Alors, comme $v \in V$, on a que $\exists\, Z \in \mathbf{V}$, $Z \subseteq V$, $v \in Z$ et $v \notin f(Z)$.
Or, $V \subseteq W$, donc $Z \subseteq W$. Ainsi, par définition de μ_f, $v \notin \mu_f(W)$, ce qui est impossible. ∎

Lemme 35 Soient $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ et $\mathbf{X}$ des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, f une fonction de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$ et μ une fonction de sélection cohérente de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{X}$ telle que $\forall V \in \mathbf{V}$, $f(V) = M_{T(\mu(V))}$.
Alors, $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $f(V) = M_{T(\mu_f(V))}$.

Preuve Soit $V \in \mathbf{V}$. On montre que $f(V) = M_{T(\mu_f(V))}$.
Cas 1 : $\exists\, v \in \mu(V), v \notin \mu_f(V)$.
Comme $\mu(V) \subseteq V$, on a que $v \in V$.
Donc, par définition de μ_f, $\exists\, W \in \mathbf{V}$, $W \subseteq V$, $v \in W$ et $v \notin f(W) = M_{T(\mu(W))} \supseteq \mu(W)$.
D'autre part, comme μ est cohérente, on a que $\mu(V) \cap W \subseteq \mu(W)$.
Donc, $v \in \mu(W)$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $\mu(V) \subseteq \mu_f(V)$.
Cas 2.1 : $\exists\, v \in \mu_f(V), v \notin f(V)$.
Alors, $\exists\, W \in \mathbf{V}$, $W \subseteq V$, $v \in W$ et $v \notin f(W)$.
En effet, il suffit de prendre V lui-même pour le choix de W.
Ainsi, $v \notin \mu_f(V)$, ce qui est impossible.
Cas 2.2 : $\mu_f(V) \subseteq f(V)$.
Alors, $f(V) = M_{T(\mu(V))} \subseteq M_{T(\mu_f(V))} \subseteq M_{T(f(V))} = M_{T(M_{T(\mu(V))})} = M_{T(\mu(V))} = f(V)$. ∎

A présent, tout est prêt pour montrer le théorème de représentation :

Notation 36 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
Considérons la condition suivante : $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$,

$(\mid\!\sim5)$ $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}, \text{si } v \in M_\Delta \subseteq M_\Gamma, \text{alors } v \in M_{\mid\sim(\Delta)}\})$.

Proposition 37 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
Alors, $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence préférentielle ssi $(\mid\!\sim5)$ est satisfaite.

Preuve *Direction : "$\rightarrow$".*
Il existe une fonction de sélection cohérente μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma))$.
Soit f la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{D}$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{D}$, on a $f(V) = M_{T(\mu(V))}$.
Par le lemme 35, on a que $\forall\, V \in \mathbf{D}$, $f(V) = M_{T(\mu_f(V))}$.
Notons que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{T(\mu(M_\Gamma))} = M_{\mid\sim(\Gamma)}$.
On montre que $(\mid\!\sim 5)$ est satisfaite. Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$.
Alors, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma)) = T(M_{T(\mu(M_\Gamma))}) = T(f(M_\Gamma)) = T(M_{T(\mu_f(M_\Gamma))}) = T(\mu_f(M_\Gamma)) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, W \in \mathbf{D}$, si $v \in W \subseteq M_\Gamma$, alors $v \in f(W)\}) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta \subseteq M_\Gamma$, alors $v \in f(M_\Delta)\}) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta \subseteq M_\Gamma$, alors $v \in M_{\mid\sim(\Delta)}\})$.

Direction : "$\leftarrow$".
Supposons que $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 5)$.
Soit f la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{D}$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, on a $f(M_\Gamma) = M_{\mid\sim(\Gamma)}$.
Notons que f est bien définie. En effet, si $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et $M_\Gamma = M_\Delta$, alors, par $(\mid\!\sim 5)$, $\mid\!\sim(\Gamma) = \mid\!\sim(\Delta)$.
De plus, par $(\mid\!\sim 5)$, on a clairement que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu_f(M_\Gamma))$.
Enfin, par le lemme 34, μ_f est une fonction de sélection cohérente. ∎

3.3 Le cas discriminant et PrD

Dans cette section, on va caractériser des relations de conséquence préférentielles-discriminantes PrD. Pour cela, on a tout d'abord besoin de quelques notations standards et surtout de la construction inductive présentée dans la définition 39.

Notation 38 $\mathbb{N}$ dénote les entiers naturels incluant 0 : $\{0, 1, 2, \ldots, \}$.
$\mathbb{N}^+$ dénote les entiers naturels strictement positifs : $\{1, 2, \ldots, \}$.
$\mathbb{Z}$ dénote les entiers relatifs.
Soient $i, j \in \mathbb{Z}$. Alors, $[i, j]$ dénote l'ensemble de tous les $k \in \mathbb{Z}$ (pas dans $\mathbb{R}$) tels que $i \leq k \leq j$.
Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\vee$ un connecteur binaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in \mathcal{F}$.
A chaque fois qu'on écrira $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_r$, on voudra dire : $(\ldots((\beta_1 \vee \beta_2) \vee \beta_3) \vee \ldots \vee \beta_{r-1}) \vee \beta_r$.

Définition 39 Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique, $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ et $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors,

$$H_1(\Gamma) := \{\neg\beta \in \mathcal{F} : \beta \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma)) \setminus \mid\!\sim(\Gamma) \text{ et } \neg\beta \notin \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma))\}.$$

Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \geq 2$. Alors,

$$H_i(\Gamma) := \{\neg\beta \in \mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{l} \beta \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H_1(\Gamma), \ldots, H_{i-1}(\Gamma)) \setminus \mid\!\sim(\Gamma) \text{ et} \\ \neg\beta \notin \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H_1(\Gamma), \ldots, H_{i-1}(\Gamma)) \end{array} \right. \}.$$

$$H(\Gamma) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} H_i(\Gamma).$$

Définition 40 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ un connecteur binaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
Alors, on considère les conditions suivantes : $\forall\, \Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}$,

($\mid\!\sim 6$) si $\beta \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma)) \setminus \mid\!\sim(\Gamma)$ et $\neg\alpha \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), \neg\beta)$, alors $\alpha \notin \mid\!\sim(\Gamma)$;

($\mid\!\sim 7$) si $\alpha \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma)) \setminus \mid\!\sim(\Gamma)$ et $\beta \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), \neg\alpha) \setminus \mid\!\sim(\Gamma)$, alors $\alpha \vee \beta \notin \mid\!\sim(\Gamma)$;

($\mid\!\sim 8$) si $\alpha \in \mid\!\sim(\Gamma)$, alors $\neg\alpha \notin \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma))$;

($\mid\!\sim 9$) si $\Delta \subseteq \vdash(\Gamma)$, alors $\mid\!\sim(\Gamma) \cup H(\Gamma) \subseteq \vdash(\Delta, \mid\!\sim(\Delta), H(\Delta), \Gamma)$;

($\mid\!\sim 10$) si $\Gamma \subseteq \vdash(\Delta) \subseteq \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma))$, alors $\mid\!\sim(\Gamma) \cup H(\Gamma) \subseteq \vdash(\Delta, \mid\!\sim(\Delta), H(\Delta))$;

($\mid\!\sim 11$) si Γ est consistant, alors $\mid\!\sim(\Gamma)$ est consistant, $\Gamma \subseteq \mid\!\sim(\Gamma)$ et $\vdash(\mid\!\sim(\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$.

Notons que ces conditions sont purement syntaxiques si un système formel est disponible pour $\vdash$.

Proposition 41 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ et $\wedge$ des connecteurs binaires de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A1)$ et $(A3)$, et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Alors,

(0) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence préférentielle-discriminante PrC et PrD ssi ($\mid\!\sim 0$), ($\mid\!\sim 6$), ($\mid\!\sim 7$), ($\mid\!\sim 8$), ($\mid\!\sim 9$) et ($\mid\!\sim 11$) sont satisfaites ;

(1) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence préférentielle-discriminante PrC, PrD et LM ssi ($\mid\!\sim 0$), ($\mid\!\sim 6$), ($\mid\!\sim 7$), ($\mid\!\sim 8$), ($\mid\!\sim 9$), ($\mid\!\sim 10$) et ($\mid\!\sim 11$) sont satisfaites.

Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ satisfait aussi $(A2)$. Alors,

(2) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence préférentielle-discriminante PrD ssi ($\mid\!\sim 0$), ($\mid\!\sim 6$), ($\mid\!\sim 7$), ($\mid\!\sim 8$) et ($\mid\!\sim 9$) sont satisfaites ;

(3) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence préférentielle-discriminante PrD et LM ssi ($\mid\!\sim 0$), ($\mid\!\sim 6$), ($\mid\!\sim 7$), ($\mid\!\sim 8$), ($\mid\!\sim 9$) et ($\mid\!\sim 10$) sont satisfaites.

La preuve de la proposition 41 a été repoussée à la fin de la section 3.3. On a d'abord besoin de la définition 42 et des lemmes 43, 44 et 45 ci-après. On commence avec des outils purement techniques :

Définition 42 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ un connecteur binaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A1)$, $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ et $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors,

$$M^1_\Gamma := \{v \in M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} : \exists\, \beta \in T(M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)}) \setminus \mid\!\sim(\Gamma),\ v \notin M_{\neg\beta}\}.$$

Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \geq 2$. Alors,

$$M^i_\Gamma := \{v \in M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{i-1}_\Gamma : \exists \beta \in T(M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{i-1}_\Gamma) \setminus \mid\!\sim(\Gamma),\ v \notin M_{\neg\beta}\}.$$

$$M'_\Gamma := \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} M^i_\Gamma$$

$$n(\Gamma) := |\{i \in \mathbb{N}^+ : M^i_\Gamma \neq \emptyset\}|$$

Supposons que $M^1_\Gamma \neq \emptyset$. Alors, on note β^1_Γ un élément de $\mathcal{F}$ (choisi arbitrairement) tel que $\exists\, r \in \mathbb{N}^+$, $\exists\, v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathcal{V}$ et $\exists\, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in \mathcal{F}$ tels que $M^1_\Gamma = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$,

$$\beta^1_\Gamma = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_r,$$

et $\forall\, j \in [1, r]$, $\beta_j \notin\, \mid\!\sim(\Gamma)$, $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \subseteq M_{\beta_j}$ et $v_j \notin M_{\neg\beta_j}$.
Comme $M^1_\Gamma \neq \emptyset$ et M^1_Γ est fini (grâce à $(A1)$), un tel élément existe bien.

Supposons que $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$ et $M^i_\Gamma \neq \emptyset$.
Alors, On note β^i_Γ un élément de $\mathcal{F}$ (choisi arbitrairement) tel que
$\exists\, r \in \mathbb{N}^+$, $\exists\, v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathcal{V}$ et $\exists\, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in \mathcal{F}$ tels que $M^i_\Gamma = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$,

$$\beta^i_\Gamma = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_r,$$

et $\forall\, j \in [1, r]$, $\beta_j \notin\, \mid\!\sim(\Gamma)$, $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{i-1}_\Gamma \subseteq M_{\beta_j}$ et $v_j \notin M_{\neg\beta_j}$.
Comme $M^i_\Gamma \neq \emptyset$ et M^i_Γ est fini, un tel élément existe bien.

Supposons que $M'_\Gamma \neq \emptyset$. Alors,

$$\beta_\Gamma := \beta^1_\Gamma \vee \beta^2_\Gamma \vee \ldots \vee \beta^{n(\Gamma)}_\Gamma$$

Comme $M'_\Gamma \neq \emptyset$, $n(\Gamma) \geq 1$. De plus, on montrera dans le lemme 43 ci-après que $n(\Gamma)$ est fini et que $\forall\, i \in \mathbb{N}^+$ tel que $i \leq n(\Gamma)$, on a $M^i_\Gamma \neq \emptyset$. Donc, β_Γ est bien défini.

$$F(\Gamma) := \begin{cases} \{\neg\beta_\Gamma\} & \text{si } M'_\Gamma \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

$$G(\Gamma) := \{\alpha \in \mathcal{F} : \alpha \notin\, \mid\!\sim(\Gamma),\ \neg\alpha \notin\, \mid\!\sim(\Gamma) \text{ et } T_d(M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), \alpha}) \subseteq\, \mid\!\sim(\Gamma)\}$$

Voici quelques résultats faciles sur les objets techniques que l'on vient de définir :

Lemme 43 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ un connecteur binaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A1)$, $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ et $i, j \in \mathbb{N}^+$. Alors,

(0) si $i \neq j$, alors $M^i_\Gamma \cap M^j_\Gamma = \emptyset$;

(1) si $M^i_\Gamma = \emptyset$, alors $M^{i+1}_\Gamma = \emptyset$;

(2) $T_d(M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)}) \subseteq\, \mid\!\sim(\Gamma)$ ssi $M^1_\Gamma = \emptyset$;

(3) si $i \geq 2$, alors $T_d(M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{i-1}_\Gamma) \subseteq\, \mid\!\sim(\Gamma)$ ssi $M^i_\Gamma = \emptyset$;

(4) $n(\Gamma)$ est fini ;

(5) si $i \leq n(\Gamma)$, alors $M^i_\Gamma \neq \emptyset$;

(6) si $i > n(\Gamma)$, alors $M^i_\Gamma = \emptyset$;

(7) si $M'_\Gamma \neq \emptyset$, alors $M'_\Gamma = M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{n(\Gamma)}_\Gamma$;

(8) $T_d(M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma) \subseteq\, \mid\!\sim(\Gamma)$.

Preuve *Preuves de* (0), (1), (2) *et* (3). Trivial.

Preuve de (4). Evident par (0) et $(A1)$.

Preuve de (5). Supposons que $\exists\, i \in \mathbb{N}^+$, $M^i_\Gamma = \emptyset$ et $i \leq n(\Gamma)$.
Alors, par (1), on a que $\forall\, j \in \mathbb{N}^+$, $j \geq i$, $M^j_\Gamma = \emptyset$.
Donc, $|\{j \in \mathbb{N}^+ : M^j_\Gamma \neq \emptyset\}| \leq i - 1 < n(\Gamma)$, ce qui est impossible.

Preuve de (6). Supposons que $\exists\, i \in \mathbb{N}^+$, $M^i_\Gamma \neq \emptyset$ et $i > n(\Gamma)$.
Alors, par (1), on obtient que $\forall\, j \in \mathbb{N}^+$, $j \leq i$, $M^j_\Gamma \neq \emptyset$.
Donc, $|\{j \in \mathbb{N}^+ : M^j_\Gamma \neq \emptyset\}| \geq i > n(\Gamma)$, ce qui est impossible.

Preuve de (7). Evident par (6).

Preuve de (8). Cas 1 : $M'_\Gamma = \emptyset$.
Alors, $T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma) = T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$. De plus, $M^1_\Gamma = \emptyset$. Donc, par (2), on a terminé ce cas.
Cas 2 : $M'_\Gamma \neq \emptyset$.
Alors, par (7), on a que $T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma) = T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{n(\Gamma)}_\Gamma)$.
De plus, $n(\Gamma) + 1 \geq 2$ et, par (6), $M^{n(\Gamma)+1}_\Gamma = \emptyset$. Donc, par (3), on a terminé ce cas aussi. ∎

Penchons nous maintenant sur un lemme important. Son but principal est de montrer que les conditions ($\mid\!\sim$6), ($\mid\!\sim$7) et ($\mid\!\sim$8) sont suffisantes pour établir l'égalité suivante : $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H(\Gamma)})$, ce qui fournit une définition sémantique de $\mid\!\sim$ (de manière discriminante).

Lemme 44 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ et $\wedge$ des connecteurs binaires de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A1)$ et $(A3)$, $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ satisfaisant ($\mid\!\sim$6), ($\mid\!\sim$7) et ($\mid\!\sim$8), et $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors,

(0) si $M'_\Gamma \neq \emptyset$, alors $\beta_\Gamma \not\in \mid\!\sim(\Gamma)$;

(1) si $M'_\Gamma \neq \emptyset$, alors $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_{\beta_\Gamma}$;

(2) si $M'_\Gamma \neq \emptyset$, alors $M'_\Gamma \cap M_{\neg\beta_\Gamma} = \emptyset$;

(3) si $M'_\Gamma \neq \emptyset$, alors $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma \subseteq M_{\neg\beta_\Gamma}$;

(4) $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),F(\Gamma)}$;

(5) $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),F(\Gamma)})$;

(6) $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H(\Gamma)} = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),F(\Gamma)}$;

(7) $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H(\Gamma)})$.

Preuve *Preuves de* (0), (1) *et* (2). Supposons que $M'_\Gamma \neq \emptyset$.
Alors, il suffit de montrer par récurrence que : $\forall\, i \in [1, n(\Gamma)]$,
$p_3(i)$ $\quad (M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^i_\Gamma) \cap M_{\neg(\beta^1_\Gamma \vee \ldots \vee \beta^i_\Gamma)} = \emptyset$;
$p_2(i)$ $\quad M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_{\beta^1_\Gamma \vee \ldots \vee \beta^i_\Gamma}$;
$p_1(i)$ $\quad \beta^1_\Gamma \vee \ldots \vee \beta^i_\Gamma \not\in \mid\!\sim(\Gamma)$.
Comme $M^1_\Gamma \neq \emptyset$, on a que $\exists\, r \in \mathbb{N}^+$, $\exists\, v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathcal{V}$ et $\exists \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in \mathcal{F}$ tels que
$M^1_\Gamma = \{v_1, \ldots, v_r\}$, $\beta^1_\Gamma = \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_r$ et $\forall\, j \in [1, r]$, $\beta_j \not\in \mid\!\sim(\Gamma)$, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_{\beta_j}$ et $v_j \not\in M_{\neg\beta_j}$.

Alors, on montrera :
(0.0) $\quad p_3(1)$ est satisfaite ;
(0.1) $\quad p_2(1)$ est satisfaite ;
(0.2) $\quad p_1(1)$ est satisfaite.
A présent, supposons que $i \in [1, n(\Gamma) - 1]$ et que $p_1(i)$, $p_2(i)$ et $p_3(i)$ sont satisfaites.
Comme $M_\Gamma^{i+1} \neq \emptyset$, on a que $\exists\, r \in \mathbb{N}^+$, $\exists\, v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathcal{V}$ et $\exists\, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r \in \mathcal{F}$ tels que $M_\Gamma^{i+1} = \{v_1, \ldots, v_r\}$, $\beta_\Gamma^{i+1} = \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_r$ et
$\forall\, j \in [1, r]$, $\beta_j \not\in {\mid\!\sim}(\Gamma)$, $M_{\Gamma, {\mid\!\sim}(\Gamma)} \setminus M_\Gamma^1 \cup \ldots \cup M_\Gamma^i \subseteq M_{\beta_j}$ et $v_j \not\in M_{\neg \beta_j}$.
Alors, on montrera que :
(0.3) $\quad p_3(i + 1)$ est satisfaite ;
(0.4) $\quad p_2(i + 1)$ est satisfaite ;
(0.5) $\quad \beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^i \vee \beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_r \not\in {\mid\!\sim}(\Gamma)$;
(0.6) $\quad p_1(i + 1)$ est satisfaite.

Preuve de (0.0). Si $v_j \in M_\Gamma^1$, alors $v_j \not\in M_{\neg \beta_j}$. Or, par $(A3)$, on a que $M_{\neg \beta_\Gamma^1} \subseteq M_{\neg \beta_j}$.

Preuve de (0.1). On a que $M_{\Gamma, {\mid\!\sim}(\Gamma)} \subseteq M_{\beta_1}$ ce qui est un sous-ensemble de $M_{\beta_\Gamma^1}$, par $(A3)$.

Preuve de (0.2). Il suffit de montrer par récurrence que : $\forall\, j \in [1, r]$,
$q(j)$ $\quad \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_j \not\in {\mid\!\sim}(\Gamma)$.
Clairement, $q(1)$ est satisfaite.
Soit $j \in [1, r - 1]$. Supposons $q(j)$. On montre $q(j + 1)$.
Par $(A3)$, on a que $M_{\Gamma, {\mid\!\sim}(\Gamma)} \subseteq M_{\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_j}$.
D'autre part, $M_{\Gamma, {\mid\!\sim}(\Gamma), \neg(\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_j)} \subseteq M_{\Gamma, {\mid\!\sim}(\Gamma)} \subseteq M_{\beta_{j+1}}$.
Donc, par $q(j)$ et $({\mid\!\sim}7)$ (prenez $\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_j$ pour α et β_{j+1} pour β), on obtient que $\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_{j+1} \not\in {\mid\!\sim}(\Gamma)$.

Preuve de (0.3). Soit $v \in M_\Gamma^1 \cup \ldots \cup M_\Gamma^{i+1}$. On montre que $v \not\in M_{\neg(\beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^{i+1})}$.
Cas 1 : $v \in M_\Gamma^1 \cup \ldots \cup M_\Gamma^i$.
Alors, par $p_3(i)$, on a que $v \not\in M_{\neg(\beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^i)}$.
Or, par $(A3)$, on a que $M_{\neg(\beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^{i+1})} \subseteq M_{\neg(\beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^i)}$.
Cas 2 : $v \in M_\Gamma^{i+1}$.
Alors, $\exists\, j \in [1, r]$, $v = v_j$. Donc, $v \not\in M_{\neg \beta_j}$.
Or, par $(A3)$, on a que $M_{\neg(\beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^{i+1})} \subseteq M_{\neg \beta_\Gamma^{i+1}} \subseteq M_{\neg \beta_j}$.

Preuve de (0.4). Par $p_2(i)$ et $(A3)$, on a que $M_{\Gamma, {\mid\!\sim}(\Gamma)} \subseteq M_{\beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^i} \subseteq M_{\beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^{i+1}}$.

Preuve de (0.5). Il suffit de montrer par récurrence que $\forall\, j \in [1, r]$:
$q(j)$ $\quad \beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^i \vee \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_j \not\in {\mid\!\sim}(\Gamma)$.
On montrera que :
$(0.5.0)$ $\quad M_{\Gamma, {\mid\!\sim}(\Gamma), \neg(\beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^i)} \subseteq M_{\beta_1}$.
Alors, par $p_1(i)$, $p_2(i)$, $(0.5.0)$ et $({\mid\!\sim}7)$ (prenez $\beta_\Gamma^1 \vee \ldots \vee \beta_\Gamma^i$ pour α et β_1 pour β), $q(1)$ est satisfaite.
A présent, supposons que $j \in [1, r - 1]$ et supposons $q(j)$.
Alors, on montrera que :

(0.5.1) $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg(\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^i_\Gamma\vee\beta_1\vee\ldots\vee\beta_j)} \subseteq M_{\beta_{j+1}}$.
De plus, par $p_2(i)$ et $(A3)$, on obtient que :
(0.5.2) $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_{\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^i_\Gamma\vee\beta_1\vee\ldots\vee\beta_j}$.
Par $(0.5.1)$, $(0.5.2)$, $q(j)$ et ($\mid\!\sim$7) (prenez $\beta^1_\Gamma \vee \ldots \vee \beta^i_\Gamma \vee \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_j$ pour α et β_{j+1} pour β), on obtient que $q(j+1)$ est satisfaite.

Preuve de $(0.5.0)$. Soit $v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg(\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^i_\Gamma)}$. Alors, $v \in M_{\neg(\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^i_\Gamma)}$.
Donc, par $p_3(i)$, $v \notin M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^i_\Gamma$. Ainsi, $v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^i_\Gamma \subseteq M_{\beta_1}$.

Preuve de $(0.5.1)$. Soit $v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg(\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^i_\Gamma\vee\beta_1\vee\ldots\vee\beta_j)}$. Alors, par $(A3)$, $v \in M_{\neg(\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^i_\Gamma)}$.
Ainsi, par $p_3(i)$, $v \notin M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^i_\Gamma$. Donc, $v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^i_\Gamma \subseteq M_{\beta_{j+1}}$.

Preuve de (0.6). Par $p_2(i)$ et $(A3)$, on obtient que $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_{\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^i_\Gamma} \subseteq M_{\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^i_\Gamma\vee\beta_1\vee\ldots\vee\beta_r}$.
De plus, par $(A3)$, on a aussi que $M_{\neg(\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^i_\Gamma\vee\beta_1\vee\ldots\vee\beta_r)} = M_{\neg(\beta^1_\Gamma\vee\ldots\vee\beta^{i+1}_\Gamma)}$.
Ainsi, par (0.5) et ($\mid\!\sim$6) (prenez $\beta^1_\Gamma \vee \ldots \vee \beta^{i+1}_\Gamma$ pour α et $\beta^1_\Gamma \vee \ldots \vee \beta^i_\Gamma \vee \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_r$ pour β), on obtient que $p_1(i+1)$ est satisfaite.

Preuve de (3). Supposons que $M'_\Gamma \neq \emptyset$, que $v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma$ et que $v \notin M_{\neg\beta_\Gamma}$.
Alors, par (0), (1) et la définition de M^i_Γ, $v \in M^{n(\Gamma)+1}_\Gamma$, ce qui est impossible par le lemme 43 (6).

Preuve de (4). Cas 1 : $M'_\Gamma \neq \emptyset$.
Par (3), on obtient une direction : $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma}$.
Par (2), on obtient l'autre direction : $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma} \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma$.
Cas 2 : $M'_\Gamma = \emptyset$.
Alors, clairement $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),F(\Gamma)}$.

Preuve de (5). Direction : "$\subseteq$".
Cas 1 : $M'_\Gamma \neq \emptyset$.
Supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, i.e. $\exists\, \alpha \in \mid\!\sim(\Gamma)$, $\alpha \notin T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma})$.
Alors, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma} \subseteq M_{\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_\alpha$. Donc, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma} \subseteq M_{\neg\alpha}$.
En conséquence, par (0), (1) et ($\mid\!\sim$6), on obtient que $\alpha \notin \mid\!\sim(\Gamma)$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $M'_\Gamma = \emptyset$.
Soit $\alpha \in \mid\!\sim(\Gamma)$. Alors, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_{\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_\alpha$. De plus, par ($\mid\!\sim$8), $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \not\subseteq M_{\neg\alpha}$.
En conséquence, $\alpha \in T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)}) = T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),F(\Gamma)})$.
Direction : "$\supseteq$". Evident par (4) et le lemme 43 (8).

Preuve de (6). Direction : "$\subseteq$".
Cas 1 : $M'_\Gamma = \emptyset$.
Cas 1.1 : $H_1(\Gamma) \neq \emptyset$.
Alors, $\exists\, \alpha \in \mathcal{F}$, $\alpha \notin \mid\!\sim(\Gamma)$, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_\alpha$ et $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \not\subseteq M_{\neg\alpha}$.
Donc, $\alpha \in T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$. Ainsi, par (5), $\alpha \in \mid\!\sim(\Gamma)$, ce qui est impossible.
Cas 1.2 : $H_1(\Gamma) = \emptyset$.
Clairement, $\forall\, i \in \mathbb{N}^+$, si $H_i(\Gamma) = \emptyset$, alors $H_{i+1}(\Gamma) = \emptyset$. Ainsi, $H(\Gamma) = \emptyset = F(\Gamma)$.
Cas 2 : $M'_\Gamma \neq \emptyset$.

Comme $M'_\Gamma \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)}$, on obtient par (2) que $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \not\subseteq M_{\neg\beta_\Gamma}$.
Donc, par (0) et (1), on a que $\neg\beta_\Gamma \in H_1(\Gamma) \subseteq H(\Gamma)$. Ainsi, $M_{H(\Gamma)} \subseteq M_{F(\Gamma)}$.

Direction : "$\supseteq$".

Cas 1 : $M'_\Gamma = \emptyset$.
Même preuve (verbatim) que pour le cas 1 de la direction "$\subseteq$".
Cas 2 : $M'_\Gamma \neq \emptyset$.
Alors, ce qui suit est valide :
(6.0) $\quad \forall i \in \mathbb{N}^+$, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma} \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H_1(\Gamma),\ldots,H_i(\Gamma)}$.
Supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, i.e. $\exists\, v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma}$, $v \notin M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H(\Gamma)}$.
Alors, $v \notin M_{H(\Gamma)}$. Or, clairement $M_{H(\Gamma)} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^+} M_{H_i(\Gamma)}$.
Ainsi, $\exists\, i \in \mathbb{N}^+$, $v \notin M_{H_i(\Gamma)}$, ce qui est impossible par (6.0).

Preuve de (6.0). On montre par récurrence que : $\forall i \in \mathbb{N}^+$,
$p(i)$ $\quad M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma} \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H_1(\Gamma),\ldots,H_i(\Gamma)}$.
On montrera que
$(6.0.0)$ $\quad p(1)$ est satisfaite.
Soit $i \in \mathbb{N}^+$. Supposons que $p(i)$ est satisfaite et que $p(i+1)$ n'est pas satisfaite.
Alors, $\exists\, v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma}$, $v \notin M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H_1(\Gamma),\ldots,H_{i+1}(\Gamma)}$.
Donc, $\exists\, j \in [1, i+1]$, $v \notin M_{H_j(\Gamma)}$.
Cas 1 : $j = 1$.
Alors, $\exists\, \beta \in \mathcal{F}$, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_\beta$, $\beta \notin \mid\!\sim(\Gamma)$ et $v \notin M_{\neg\beta}$.
Dons, $v \in M^1_\Gamma \cap M_{\neg\beta_\Gamma}$, ce qui est impossible par (2).
Cas 2 : $j \geq 2$.
Alors, $\exists\, \beta \in \mathcal{F}$, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H_1(\Gamma),\ldots,H_{j-1}(\Gamma)} \subseteq M_\beta$, $\beta \notin \mid\!\sim(\Gamma)$ et $v \notin M_{\neg\beta}$.
Or, par le lemme 43 (7), par (4) et par $p(i)$, we obtient que
$M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{n(\Gamma)}_\Gamma = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma} \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H_1(\Gamma),\ldots,H_i(\Gamma)} \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H_1(\Gamma),\ldots,H_{j-1}(\Gamma)} \subseteq M_\beta$.
Ainsi, $v \in M^{n(\Gamma)+1}_\Gamma$, ce qui est impossible par le lemme 43 (6).

Preuve de $(6.0.0)$. Supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, i.e.
supposons $\exists\, v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\neg\beta_\Gamma}$, $v \notin M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H_1(\Gamma)}$.
Alors, $v \notin M_{H_1(\Gamma)}$. Donc, $\exists\, \beta \in \mathcal{F}$, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_\beta$, $\beta \notin \mid\!\sim(\Gamma)$ et $v \notin M_{\neg\beta}$.
Donc, $v \in M^1_\Gamma$. Ainsi, $v \in M'_\Gamma \cap M_{\neg\beta_\Gamma}$, ce qui est impossible par (2).

Preuve de (7). Evident (5) et (6). ∎

On se tourne à présent vers un autre lemme important. Son but est essentiellement de montrer que toute fonction de sélection PrD μ représentant (de manière discriminante) une relation de conséquence $\mid\!\sim$ est telle que $\mu(M_\Gamma) = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H(\Gamma)}$, ce qui permet de définir μ à partir de $\mid\!\sim$.

Lemme 45 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ et $\wedge$ des connecteurs binaires de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A1)$ et $(A3)$, $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$, μ une fonction de sélection PrD de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{V}$, $\mid\!\sim$ la relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma))$ et enfin $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors :

(0) $\;\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)}$;

(1) $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$6) ;

(2) $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$7) ;

(3) $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$8) ;

(4) $M'_\Gamma \cap \mu(M_\Gamma) = \emptyset$;

(5) $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), T_c(\mu(M_\Gamma))} = \mu(M_\Gamma)$;

(6) si $M'_\Gamma \neq \emptyset$, alors $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)} = \mu(M_\Gamma)$.

Si $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ satisfait aussi $(A2)$, alors :

(7) si $M'_\Gamma = \emptyset$, alors $M_{G(\Gamma)} = M_{T_c(\mu(M_\Gamma))}$;

(8) si $M'_\Gamma = \emptyset$, alors $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \subseteq M_{G(\Gamma)}$;

(9) $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)} = \mu(M_\Gamma)$.

Si μ est PrC, alors de nouveau :

(10) $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)} = \mu(M_\Gamma)$.

Preuve *Preuve de* (0). On montre que $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\mid\sim(\Gamma)}$. Soit $v \in \mu(M_\Gamma)$ et $\alpha \in \mid\!\sim(\Gamma)$.
Alors, $\alpha \in T_d(\mu(M_\Gamma))$. Donc, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_\alpha$. Donc, $v \in M_\alpha$.
D'autre part, on a clairement que $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_\Gamma$. Ainsi, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_\Gamma \cap M_{\mid\sim(\Gamma)} = M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)}$.

Preuve de (1). Supposons que $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, que $\beta \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma)) \setminus \mid\!\sim(\Gamma)$ et que $\neg\alpha \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), \neg\beta)$.
Alors, par (0), $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \subseteq M_\beta$. Or, $\beta \notin \mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma))$. Donc, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\neg\beta}$.
En conséquence, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), \neg\beta} \subseteq M_{\neg\alpha}$. Ainsi, $\alpha \notin T_d(\mu(M_\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$.

Preuve de (2). Supposons que $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma)) \setminus \mid\!\sim(\Gamma)$ et $\beta \in \vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), \neg\alpha) \setminus \mid\!\sim(\Gamma)$.
Alors, par (0), $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \subseteq M_\alpha$. Or, $\alpha \notin T_d(\mu(M_\Gamma))$. Donc, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\neg\alpha}$.
Ainsi, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), \neg\alpha} \subseteq M_\beta$. Or, $\beta \notin T_d(\mu(M_\Gamma))$. Donc, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\neg\beta}$.
Donc, par $(A3)$, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\neg\alpha} \cap M_{\neg\beta} = M_{\neg(\alpha\vee\beta)}$. En conséquence, $\alpha \vee \beta \notin T_d(\mu(M_\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$.

Preuve de (3). Soit $\alpha \in \mid\!\sim(\Gamma)$. Alors, $\alpha \in T_d(\mu(M_\Gamma))$. Donc, $\mu(M_\Gamma) \not\subseteq M_{\neg\alpha}$.
Donc, par (0), $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \not\subseteq M_{\neg\alpha}$.

Preuve de (4). Cas 1 : $M'_\Gamma = \emptyset$. Evident.
Cas 2 : $M'_\Gamma \neq \emptyset$.
Il suffit de montrer par récurrence que : $\forall\, i \in [1, n(\Gamma)]$,
$p(i) \quad (M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^i_\Gamma) \cap \mu(M_\Gamma) = \emptyset$.
On montrera que :
(4.0) $\quad p(1)$ est satisfaite.
Soit $i \in [1, n(\Gamma) - 1]$. Supposons que $p(i)$ est satisfaite. On montre que $p(i+1)$ est satisfaite.
Cas 1 : $M^{i+1}_\Gamma \cap \mu(M_\Gamma) = \emptyset$.
Alors, par $p(i)$, on obtient clairement $p(i+1)$.
Cas 2 : $\exists\, v \in M^{i+1}_\Gamma \cap \mu(M_\Gamma)$.
Alors, $\exists\, \beta \in \mathcal{F}$, $\beta \notin \mid\!\sim(\Gamma)$, $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^i_\Gamma \subseteq M_\beta$ et $v \notin M_{\neg\beta}$.
Ainsi, par (0) et $p(i)$, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^i_\Gamma \subseteq M_\beta$. Or, $\mu(M_\Gamma) \not\subseteq M_{\neg\beta}$.
En conséquence, $\beta \in T_d(\mu(M_\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$, ce qui est impossible.

Preuve de (4.0). Supposons le contraire de $p(1)$, i.e. $\exists\, v \in M^1_\Gamma \cap \mu(M_\Gamma)$.
Alors, $\exists\, \beta \in \mathcal{F}$, $\beta \notin {\mid\!\sim}(\Gamma)$, $M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)} \subseteq M_\beta$ et $v \notin M_{\neg\beta}$.
Ainsi, par (0), $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_\beta$. D'autre part, $\mu(M_\Gamma) \not\subseteq M_{\neg\beta}$.
Ainsi, $\beta \in T_d(\mu(M_\Gamma)) = {\mid\!\sim}(\Gamma)$, ce qui est impossible.

Preuve de (5). Comme $\mu(M_\Gamma) \in \mathbf{D}$, on a que $\exists\, \Gamma' \subseteq \mathcal{F}$, $M_{\Gamma'} = \mu(M_\Gamma)$.
Ainsi, $M_{T(\mu(M_\Gamma))} = M_{T(M_{\Gamma'})} = M_{\Gamma'} = \mu(M_\Gamma)$.
Donc, $M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),T_c(\mu(M_\Gamma))} = M_{\Gamma,T_d(\mu(M_\Gamma)),T_c(\mu(M_\Gamma))} = M_{\Gamma,T(\mu(M_\Gamma))}$. Or, $\Gamma \subseteq T(\mu(M_\Gamma))$.
Ainsi, $M_{\Gamma,T(\mu(M_\Gamma))} = M_{T(\mu(M_\Gamma))} = \mu(M_\Gamma)$.

Preuve de (6). Supposons que $M'_\Gamma \neq \emptyset$. Direction : "$\subseteq$".
Cas 1 : $\exists\, v \in M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{n(\Gamma)}_\Gamma$, $v \notin M_{T_c(\mu(M_\Gamma))}$.
Alors, $\exists\, \alpha \in T_c(\mu(M_\Gamma))$, $v \notin M_\alpha$.
Par le lemme 44 (3), le lemme 43 (7) et par $(A3)$, $M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{n(\Gamma)}_\Gamma \subseteq M_{\neg\beta_\Gamma} \subseteq M_{\neg(\beta_\Gamma \wedge \alpha)}$.
Par (0) et le lemme 44 (1), $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\beta_\Gamma} \cap M_\alpha = M_{\neg\neg(\beta_\Gamma \wedge \alpha)}$.
Ainsi, $\neg(\beta_\Gamma \wedge \alpha) \notin T_d(\mu(M_\Gamma)) = {\mid\!\sim}(\Gamma)$.
De plus, $v \notin M_\alpha \supseteq M_{\neg\neg(\beta_\Gamma \wedge \alpha)}$.
En conséquence, $v \in M^{n(\Gamma)+1}_\Gamma$ (prenez $\neg(\beta_\Gamma \wedge \alpha)$ pour β dans la définition de M^i_Γ).
Ainsi, par le lemme 43 (6), on obtient une contradiction.
Cas 2 : $M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{n(\Gamma)}_\Gamma \subseteq M_{T_c(\mu(M_\Gamma))}$.
Alors, par le lemme 44 (6), le lemme 44 (4), le lemme 43 (7) et par (5), on obtient que
$M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),H(\Gamma)} = M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)} \setminus M^1_\Gamma \cup \ldots \cup M^{n(\Gamma)}_\Gamma \subseteq M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),T_c(\mu(M_\Gamma))} = \mu(M_\Gamma)$.
Direction : "$\supseteq$".
Par (0), (4), le lemme 44 (4) et le lemme 44 (6), on obtient que
$\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)} \setminus M'_\Gamma = M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),F(\Gamma)} = M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),H(\Gamma)}$.

Preuve de (7). Supposons que $M'_\Gamma = \emptyset$. Direction : "$\supseteq$".
Supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, i.e. $\exists\, v \in M_{T_c(\mu(M_\Gamma))}$, $v \notin M_{G(\Gamma)}$.
Alors, $\exists\, \alpha \in G(\Gamma)$, $v \notin M_\alpha$.
Cas 1 : $\alpha \in T(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)})$.
Comme $\alpha \in G(\Gamma)$, on a que $\alpha \notin {\mid\!\sim}(\Gamma)$. Donc, par le lemme 44 (5), $\alpha \notin T_d(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)})$.
Ainsi, $\alpha \in T_c(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)})$. En conséquence, par (0), $\alpha \in T_c(\mu(M_\Gamma))$.
Donc, $v \in M_\alpha$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $\neg\alpha \in T(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)})$.
Comme $\alpha \in G(\Gamma)$, on a que $\neg\alpha \notin {\mid\!\sim}(\Gamma)$. Donc, par le lemme 44 (5), $\neg\alpha \notin T_d(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)})$.
Ainsi, $\neg\alpha \in T_c(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)})$. En conséquence, par $(A3)$, $\alpha \in T_c(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)})$.
Ainsi, par (0), $\alpha \in T_c(\mu(M_\Gamma))$. Donc, $v \in M_\alpha$, ce qui est impossible.
Cas 3 : $\alpha \notin T(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)})$ et $\neg\alpha \notin T(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)})$.
Alors, par $(A2)$, $M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),\alpha} \not\subseteq M_{\neg\alpha}$. Ainsi, $\alpha \in T_d(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),\alpha})$.
Or, $\alpha \in G(\Gamma)$. Donc, $T_d(M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),\alpha}) \subseteq {\mid\!\sim}(\Gamma)$. Donc, $\alpha \in {\mid\!\sim}(\Gamma)$.
Ainsi, $\alpha \notin G(\Gamma)$, ce qui est impossible.
Direction : "$\subseteq$".
Supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, i.e. $\exists\, v \in M_{G(\Gamma)}$, $v \notin M_{T_c(\mu(M_\Gamma))}$.

Alors, on montrera que :
(7.0) $\quad \exists\, \alpha \in T_c(\mu(M_\Gamma)), |M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}| < |\mu(M_\Gamma)|$
Or, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_\alpha$ et, par (0), $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)}$. Ainsi, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}$.
Donc, $|\mu(M_\Gamma)| \leq |M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}|$, ce qui est impossible par (7.0).

Preuve de (7.0). On a que $\exists\, \delta \in T_c(\mu(M_\Gamma)), v \notin M_\delta$.
Par $(A1)$, $|M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\delta}|$ est fini. Pour montrer (7.0), il suffit de montrer par récurrence (dans le sens décroissant que) : $\forall\, i \in \mathbb{Z}$ tel que $i \leq |M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\delta}|$, on a
$p(i) \quad \exists\, \alpha \in T_c(\mu(M_\Gamma)), v \notin M_\alpha$ et $|M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}| - |\mu(M_\Gamma)| \leq i$.
Clairement, $p(|M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\delta}|)$ est satisfaite (prenez δ).
Soit $i \in \mathbb{Z}$ tel que $i \leq |M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\delta}|$. Supposons $p(i)$. On montre $p(i-1)$.
On a que $\exists\, \alpha \in T_c(\mu(M_\Gamma)), v \notin M_\alpha$ et $|M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}| - |\mu(M_\Gamma)| \leq i$.
Cas 1 : $T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}) \subseteq \mid\!\sim(\Gamma)$.
Comme $\alpha \in T_c(\mu(M_\Gamma))$ et $(A3)$ est satisfaite, on obtient que $\neg\alpha \in T_c(\mu(M_\Gamma))$.
Or, $T_c(\mu(M_\Gamma)) \cap T_d(\mu(M_\Gamma)) = \emptyset$. Donc, ni α ni $\neg\alpha$ n'appartient à $T_d(\mu(M_\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$.
En conséquence, $\alpha \in G(\Gamma)$. Donc, $v \in M_\alpha$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $\exists\, \beta \in T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}), \beta \notin \mid\!\sim(\Gamma)$.
Par (0), $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)}$. D'autre part, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_\alpha$. Donc, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha} \subseteq M_\beta$.
Or, $\beta \notin \mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma))$. Ainsi, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\neg\beta}$.
En conséquence, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_\alpha \cap M_{\neg\beta} = M_{\alpha\wedge\neg\beta}$ et $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\neg\alpha} \subseteq M_{\neg(\alpha\wedge\neg\beta)}$.
Ainsi, $\alpha \wedge \neg\beta \in T_c(\mu(M_\Gamma))$.
D'autre part, $v \notin M_\alpha \supseteq M_{\alpha\wedge\neg\beta}$.
De plus, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha\wedge\neg\beta} \subseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}$, tandis que $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha} \not\subseteq M_{\neg\beta} \supseteq M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha\wedge\neg\beta}$.
Donc, $|M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha\wedge\neg\beta}| \leq |M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}| - 1$. Donc, $|M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha\wedge\neg\beta}| - |\mu(M_\Gamma)| \leq i - 1$.
Ainsi, $p(i-1)$ est satisfaite (prenez $\alpha \wedge \neg\beta$).

Preuve de (8). Supposons que $M'_\Gamma = \emptyset$.
A présent, supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, i.e. $\exists\, v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)}, v \notin M_{G(\Gamma)}$.
Alors, $\exists\, \alpha \in G(\Gamma), v \notin M_\alpha$.
Cas 1 : $\alpha \in T(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$.
Comme $\alpha \in G(\Gamma)$, on a que $\alpha \notin \mid\!\sim(\Gamma)$. Ainsi, par le lemme 44 (5), $\alpha \notin T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$.
Donc, $\alpha \in T_c(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$. Ainsi, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_\alpha$. En conséquence, $v \in M_\alpha$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $\neg\alpha \in T(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$.
Comme $\alpha \in G(\Gamma)$, on a que $\neg\alpha \notin \mid\!\sim(\Gamma)$. Ainsi, par le lemme 44 (5), $\neg\alpha \notin T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$.
Donc, $\neg\alpha \in T_c(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$. Ainsi, par $(A3)$, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_{\neg\neg\alpha} = M_\alpha$.
En conséquence, $v \in M_\alpha$, ce qui est impossible.
Cas 3 : $\alpha \notin T(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$ et $\neg\alpha \notin T(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)})$.
Alors, par $(A2)$, $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha} \not\subseteq M_{\neg\alpha}$. Donc, $\alpha \in T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha})$. Or, $\alpha \in G(\Gamma)$. Donc, $\alpha \notin \mid\!\sim(\Gamma)$.
Ainsi, $T_d(M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),\alpha}) \not\subseteq \mid\!\sim(\Gamma)$. En conséquence, $\alpha \notin G(\Gamma)$, ce qui est impossible.

Preuve de (9). Cas 1 : $M'_\Gamma = \emptyset$.
Par le lemme 44 (6), $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H(\Gamma)} = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),F(\Gamma)} = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)}$.
Or, par (8), (7) et (5), on a que $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),G(\Gamma)} = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),T_c(\mu(M_\Gamma))} = \mu(M_\Gamma)$.
Cas 2 : $M'_\Gamma \neq \emptyset$. Evident par (6).

Preuve de (10).
Cas 1 : $M'_\Gamma = \emptyset$.
Cas 1.1 : $\exists\, v \in M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)}$, $v \notin M_{T_c(\mu(M_\Gamma))}$.
Cas 1.1.1 : Γ n'est pas consistant.
Alors, $\exists\, \alpha \in T_c(\mu(M_\Gamma))$, $v \notin M_\alpha$.
D'autre part, comme Γ n'est pas consistant, on a que $\exists\, \beta \in \mathcal{F}$, $M_\Gamma \subseteq M_\beta$ et $M_\Gamma \subseteq M_{\neg\beta}$.
On a que $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_\Gamma \subseteq M_\beta \subseteq M_{\beta\vee\neg\alpha}$.
D'autre part, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_\Gamma \subseteq M_{\neg\beta}$. Donc, $\mu(M_\Gamma) \subseteq M_{\neg\beta} \cap M_\alpha = M_{\neg(\beta\vee\neg\alpha)}$.
Ainsi, $\beta \vee \neg\alpha \notin T_d(\mu(M_\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$.
De plus, $v \notin M_\alpha \supseteq M_{\neg(\beta\vee\neg\alpha)}$.
En conséquence, $v \in M^1_\Gamma$ (prenez $\beta \vee \neg\alpha$ pour β dans la définition de M^1_Γ).
Donc, $v \in M'_\Gamma$, ce qui est impossible.
Cas 1.1.2 : Γ est consistant.
Donc, $M_\Gamma \in \mathbf{C}$. Ainsi, comme μ est PrC, on a que $\mu(M_\Gamma) \in \mathbf{C}$. Donc, $T_c(\mu(M_\Gamma)) = \emptyset$.
Ainsi, $M_{T_c(\mu(M_\Gamma))} = \mathcal{V}$. Donc, $v \in M_{T_c(\mu(M_\Gamma))}$, ce qui est impossible.
Cas 1.2 : $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_{T_c(\mu(M_\Gamma))}$.
Alors, par le lemme 44 (6), $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H(\Gamma)} = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),F(\Gamma)} = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma)} = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),T_c(\mu(M_\Gamma))}$.
Ainsi, par (5), $M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H(\Gamma)} = \mu(M_\Gamma)$.
Cas 2 : $M'_\Gamma \neq \emptyset$. Evident par (6). ∎

A présent, on fourni la preuve de la **proposition 41** (qui est énoncée au début de la section 3.3).

Preuve *Preuve de* (0). Direction : "$\rightarrow$".
Il existe une fonction de sélection cohérente, PrC et PrD μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma))$.
On montrera que :
(0.0) $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 0)$.
Par le lemme 45 (1), (2) et (3), $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 6)$, $(\mid\!\sim 7)$ et $(\mid\!\sim 8)$.
Par le lemme 45 (10) et la propriété de cohérence de μ, $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 9)$.
On montrera que :
(0.1) $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 11)$.
Direction : "$\leftarrow$".
Supposons que $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 0)$, $(\mid\!\sim 6)$, $(\mid\!\sim 7)$, $(\mid\!\sim 8)$, $(\mid\!\sim 9)$ et $(\mid\!\sim 11)$.
Alors, soit μ la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mu(M_\Gamma) = M_{\Gamma,\mid\!\sim(\Gamma),H(\Gamma)}$.
On montrera que :
(0.2) μ est bien définie.
Clairement, μ est une fonction de sélection PrD.
De plus, comme $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 9)$, on a que μ est cohérente.
On montrera que :
(0.3) μ est PrC.
Enfin, par le lemme 44 (7), $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma))$.

Preuve de (0.0). Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et que $\vdash(\Gamma) = \vdash(\Delta)$. Alors, $M_\Gamma = M_\Delta$.
Ainsi, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma)) = T_d(\mu(M_\Delta)) = \mid\!\sim(\Delta)$.

Preuve de (0.1). Supposons que $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ et que Γ est consistant.

Alors, $M_\Gamma \in \mathbf{D} \cap \mathbf{C}$. Donc, comme μ est PrC, on a que $\mu(M_\Gamma) \in \mathbf{C}$.
Ainsi, $T_d(\mu(M_\Gamma)) = T(\mu(M_\Gamma))$.
En conséquence, $\Gamma \subseteq T(M_\Gamma) \subseteq T(\mu(M_\Gamma)) = T_d(\mu(M_\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$.
De plus, $M_{\mid\sim(\Gamma)} = M_{T_d(\mu(M_\Gamma))} = M_{T(\mu(M_\Gamma))}$. Or, $\mu(M_\Gamma) \in \mathbf{C}$. Donc, $M_{T(\mu(M_\Gamma))} \in \mathbf{C}$.
En conséquence, $\mid\!\sim(\Gamma)$ est consistant.
Enfin, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma)) = T(\mu(M_\Gamma)) = T(M_{T(\mu(M_\Gamma))}) = T(M_{\mid\sim(\Gamma)}) = \vdash(\mid\!\sim(\Gamma))$.

Preuve de (0.2). Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et que $M_\Gamma = M_\Delta$.
Alors, $\vdash(\Gamma) = \vdash(\Delta)$. Donc, par $(\mid\!\sim 0)$, $\mid\!\sim(\Gamma) = \mid\!\sim(\Delta)$.
En conséquence, $H(\Gamma) = H(\Delta)$. Ainsi, $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)} = M_{\Delta, \mid\sim(\Delta), H(\Delta)}$.

Preuve de (0.3). Supposons que $V \in \mathbf{D} \cap \mathbf{C}$. Alors, $\exists\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $V = M_\Gamma$.
Cas 1 : $H_1(\Gamma) \neq \emptyset$.
Donc, $\exists\, \beta \in \mathcal{F}$, $\beta \notin \mid\!\sim(\Gamma)$ et $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} \subseteq M_\beta$.
Par $(\mid\!\sim 11)$, $\Gamma \subseteq \mid\!\sim(\Gamma)$ et $\vdash(\mid\!\sim(\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$. Donc, $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma)} = M_{\mid\sim(\Gamma)}$. Donc, $M_{\mid\sim(\Gamma)} \subseteq M_\beta$.
Ainsi, $\beta \in T(M_{\mid\sim(\Gamma)}) = \vdash(\mid\!\sim(\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $H_1(\Gamma) = \emptyset$.
Alors, $H(\Gamma) = \emptyset$. Donc, $\mu(V) = \mu(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)} = M_{\mid\sim(\Gamma)}$.
Or, par $(\mid\!\sim 11)$, $\mid\!\sim(\Gamma)$ est consistant. Ainsi, $M_{\mid\sim(\Gamma)} \in \mathbf{C}$.

Preuve de (1). Direction : "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf qu'en plus μ est LM.
Alors, par le lemme 45 (10) et la propriété LM, $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 10)$.
Direction : "$\leftarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf qu'en plus $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 10)$.
Alors, par définition de μ et par $(\mid\!\sim 10)$, μ est LM.

Preuve de (2). Direction : "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf que μ n'est plus PrC, tandis que $(A2)$ est satisfaite.
Notons que dans (0), la propriété PrC n'est utilisée que pour montrer $(\mid\!\sim 11)$ et $(\mid\!\sim 9)$.
Mais, on a plus besoin de montrer $(\mid\!\sim 11)$.
De plus, par le lemme 45 (9) et la propriété de cohérence de μ, on a de toutes façons $(\mid\!\sim 9)$.
Direction : "$\leftarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf que $(\mid\!\sim 11)$ n'est plus satisfaite, tandis que $(A2)$ si.
Cependant, dans (0), $(\mid\!\sim 11)$ n'est utilisé que pour montrer que μ est PrC, ce qui n'est plus nécessaire.
Enfin, notons que $(A2)$ n'est pas utilisée dans cette direction.

Preuve de (3). Direction "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf que μ n'est plus PrC, tandis que maintenant μ est LM et $(A2)$ est satisfaite.
Notons que dans (0), la propriété de PrC n'est utilisée que pour montrer $(\mid\!\sim 11)$ et $(\mid\!\sim 9)$.
Mais, $(\mid\!\sim 11)$ n'est plus à montrer.
D'autre part, par le lemme 45 (9) et la propriété de cohérence de μ, $(\mid\!\sim 9)$ est satisfaite.
De même, par le lemme 45 (9) et la propriété LM de μ, $(\mid\!\sim 10)$ est satisfaite.
Direction : "$\leftarrow$".

Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf que $(\mid\!\sim 11)$ n'est plus satisfaite, tandis que maintenant $(\mid\!\sim 10)$ et $(A2)$ sont satisfaites.
Notons que dans (0), $(\mid\!\sim 11)$ n'est impliquée que pour montrer que μ est PrC, ce qu'il n'est plus nécessaire de montrer.
D'autre part, par définition de μ et par $(\mid\!\sim 10)$, μ est LM.
Enfin, notons que $(A2)$ n'est pas utilisée dans cette direction. $\blacksquare$

3.4 Le cas discriminant et pas nécessairement PrD

A la différence de la section 3.3, les conditions de cette section ne seront pas purement syntaxiques. La traduction de propriétés comme la cohérence en termes syntaxiques est bloquée parce qu'on ne dispose plus de l'égalité suivante : $\mu(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$, qui est satisfaite quand les fonctions de sélection sont PrD (mais ce n'est pas le cas ici). Grâce aux lemmes 34 et 35 qu'on va montrer plus bas, on fournira une solution avec des conditions semi-syntaxiques.

Notation 46 Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
Alors, on considère la condition suivante : $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$,

$(\mid\!\sim 12)$ $\vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)) = T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F},\ \text{si}\, v \in M_\Delta \subseteq M_\Gamma,\ \text{alors}\, v \in M_{\mid\sim(\Delta), H(\Delta)}\})$.

Proposition 47 Soient $\mathcal{L}$ un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ et $\wedge$ des connecteurs binaires de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A1)$ et $(A3)$, et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Alors,

(0) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence préférentielle-discriminante PrC ssi $(\mid\!\sim 0)$, $(\mid\!\sim 6)$, $(\mid\!\sim 7)$, $(\mid\!\sim 8)$, $(\mid\!\sim 11)$ et $(\mid\!\sim 12)$ sont satisfaites.

Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ satisfait aussi $(A2)$. Alors,

(1) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence préférentielle-discriminante ssi $(\mid\!\sim 0)$, $(\mid\!\sim 6)$, $(\mid\!\sim 7)$, $(\mid\!\sim 8)$ et $(\mid\!\sim 12)$ sont satisfaites.

Preuve *Preuve de* (1). Direction : "$\rightarrow$".
Il existe une fonction de sélection cohérente μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma))$.
Donc, $\mid\!\sim$ satisfait clairement $(\mid\!\sim 0)$.
Soit f la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{D}$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{D}$, $f(V) = M_{T(\mu(V))}$.
Alors, par le lemme 35, $\forall\, V \in \mathbf{D}$, $f(V) = M_{T(\mu_f(V))}$.
D'autre part, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{T(\mu(M_\Gamma))} \subseteq M_{T(M_\Gamma)} = M_\Gamma$.
Ainsi, f est une fonction de sélection.
Clairement, f est PrD.
De plus, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma)) = T_d(M_{T(\mu(M_\Gamma))}) = T_d(f(M_\Gamma))$.
En conséquence, par le lemme 45 (1), (2) et (3), $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 6)$, $(\mid\!\sim 7)$ et $(\mid\!\sim 8)$.
D'autre part, par le lemme 45 (9), $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
On montre que $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 12)$. Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$.
Alors, $\vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)) = T(M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)}) = T(f(M_\Gamma)) = T(M_{T(\mu_f(M_\Gamma))}) = T(\mu_f(M_\Gamma)) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, W \in \mathbf{D}, \text{si } v \in W \subseteq M_\Gamma, \text{alors } v \in f(W)\}) =$

$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta \subseteq M_\Gamma$, alors $v \in f(M_\Delta)\}) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta \subseteq M_\Gamma$, alors $v \in M_{\Delta, \mid\!\sim(\Delta), H(\Delta)}\}) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F},$ si $v \in M_\Delta \subseteq M_\Gamma,$ alors $v \in M_{\mid\!\sim(\Delta), H(\Delta)}\})$.

Direction : "$\leftarrow$".

Supposons que $(\mid\!\sim 0)$, $(\mid\!\sim 6)$, $(\mid\!\sim 7)$, $(\mid\!\sim 8)$ et $(\mid\!\sim 12)$ sont satisfaites.
Soit f la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{D}$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
Par $(\mid\!\sim 0)$, f est bien définie.
Par le lemme 44 (7), $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(M_{\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)})$.
Ainsi, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(f(M_\Gamma))$.
Par $(\mid\!\sim 12)$, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{T(\mu_f(M_\Gamma))}$.
Ainsi, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(f(M_\Gamma)) = T_d(M_{T(\mu_f(M_\Gamma))}) = T_d(\mu_f(M_\Gamma))$.
Or, par le lemme 34, μ_f est une fonction de sélection cohérente.

Preuve de (0). Direction : "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (1), sauf que $(A2)$ n'est plus satisfaite, tandis que μ est PrC.
Notons que $(A2)$ n'a été employée que pour appliquer le lemme 45 (9) afin d'obtenir que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
Mais, on va obtenir cette égalité par un autre moyen.
En effet, si $V \in \mathbf{D} \cap \mathbf{C}$, alors, comme μ est PrC, $\mu(V) \in \mathbf{C}$, donc $M_{T(\mu(V))} \in \mathbf{C}$, donc $f(V) \in \mathbf{C}$.
Donc, f est PrC.
En conséquence, par le lemme 45 (10), on obtient que : $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
De plus, par la même preuve (verbatim) que pour (0.1) de la proposition 41, $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 11)$.

Direction : "$\leftarrow$".

Même preuve (verbatim) que pour (1), sauf que $(A2)$ n'est plus satisfaite, mais $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 11)$.
Cependant, dans cette direction, $(A2)$ n'a pas été utilisée dans (0).
Il reste à montrer que μ_f est PrC.
Par la même preuve (verbatim) que pour (0.3) de la proposition 41, on obtient que f est PrC.
Soit $V \in \mathbf{D} \cap \mathbf{C}$. Alors, $f(V) \in \mathbf{C}$. Donc, $M_{T(\mu_f(V))} \in \mathbf{C}$. Donc, $\mu_f(V) \in \mathbf{C}$. $\blacksquare$

Chapitre 4

Caractérisations de relations de conséquence pivotantes

Dans ce chapitre, on va produire des caractérisations pour des relations de conséquence pivotantes et pivotantes-discriminantes. Ces résultats ont été publiés dans [BN05a].

Remarque 48 Le travail de caractérisation dans ce chapitre est très similaire à celui du chapitre 3. Parfois, les preuves seront les mêmes (presque verbatim). Notons que le chapitre 3 parle de fonctions de sélection cohérentes, alors que ce chapitre parle de fonctions de sélection fortement cohérentes. Ainsi, au delà des caractérisations, une contribution de ce chapitre est de fournir un exemple de comment les techniques développées dans le chapitre 3 (en particulier, dans le cas discriminant) peuvent être adaptées à de nouvelles propriétés (ici, la cohérence forte au lieu de la cohérence).

Parfois on aura besoin de faire des hypothèses (définies dans la section 2.1.1) à propos des structures sémantiques sous considération. Cependant, aucune hypothèse ne sera nécessaire pour les deux familles suivantes :

– les relations de conséquence pivotantes (section 4.2) ;
– les relations de conséquence pivotantes PrD (section 4.1).

On supposera $(A0)$ pour :

– les relations de conséquence pivotantes UC (section 4.2).

On aura besoin de $(A3)$ et $(A1)$ pour :

– les relations de conséquence pivotantes-discriminantes PrC (section 4.4) ;
– les relations de conséquence pivotantes-discriminantes PrC et PrD (section 4.3).

On aura aussi besoin de $(A3)$, $(A1)$ et $(A2)$ pour :

– les relations de conséquence pivotantes-discriminantes (section 4.4) ;
– les relations de conséquence pivotantes-discriminantes PrD (section 4.3).

On supposera $(A0)$, $(A3)$ et $(A1)$ pour :

– les relations de conséquence pivotantes-discriminantes PrC et UC (section 4.4).

Enfin, on supposera $(A0)$, $(A3)$, $(A1)$ et $(A2)$ pour :

– les relations de conséquence pivotantes-discriminantes UC (section 4.4).

4.1 Le cas non-discriminant et PrD

Dans cette section, on caractérise la famille de toutes les relations de conséquence pivotantes PrD. On va utiliser des techniques similaires à celle de la section 3.1, c'est à dire que l'on va d'abord établir l'égalité suivante : $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\!\sim(\Gamma)}$. Ensuite, grâce à elle, on va traduire des propriétés comme la cohérence forte en termes syntaxiques.

Définition 49 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
Alors, on considère la condition suivante : $\forall\, \Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$,

$(\mid\!\sim 13)$ $\mid\!\sim(\Gamma) \subseteq \vdash(\mid\!\sim(\Delta), \Gamma)$.

Notons que cette condition est purement syntaxique si un système formel est disponible pour $\vdash$.

Proposition 50 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
Alors, $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence pivotante PrD ssi $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 0)$, $(\mid\!\sim 1)$, $(\mid\!\sim 2)$ et $(\mid\!\sim 13)$.

Preuve Direction : "$\rightarrow$".
Il existe une fonction de sélection PrD et FC μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma))$.
On montrera que :
(0) $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\!\sim(\Gamma)}$;
(1) $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 0)$;
(2) $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 1)$;
(3) $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 2)$;
(4) $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 13)$.
Direction : "$\leftarrow$".
Supposons que $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 0)$, $(\mid\!\sim 1)$, $(\mid\!\sim 2)$ et $(\mid\!\sim 13)$.
Soit μ la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\!\sim(\Gamma)}$.
On montrera que :
(5) μ est bien définie ;
(6) μ est une fonction de sélection PrD ;
(7) μ est FC ;
(8) $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma))$.

Preuve de (0). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Comme μ est PrD, on a que $\mu(M_\Gamma) \in \mathbf{D}$.
Donc, $\exists\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, $\mu(M_\Gamma) = M_\Delta$.
Ainsi, $\mu(M_\Gamma) = M_\Delta = M_{T(M_\Delta)} = M_{T(\mu(M_\Gamma))} = M_{\mid\!\sim(\Gamma)}$.

Preuve de (1). Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et que $\vdash(\Gamma) = \vdash(\Delta)$.
Alors, $M_\Gamma = M_\Delta$. Donc, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma)) = T(\mu(M_\Delta)) = \mid\!\sim(\Delta)$.

Preuve de (2). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma)) = T(M_{T(\mu(M_\Gamma))}) = T(M_{\mid\!\sim(\Gamma)}) = \vdash(\mid\!\sim(\Gamma))$.

Preuve de (3). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors, $\Gamma \subseteq T(M_\Gamma) \subseteq T(\mu(M_\Gamma)) = \mid\!\sim(\Gamma)$.

Preuve de (4). Soit $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$. Alors, par (0) et FC :

$M_{\mid\!\sim(\Delta),\Gamma} = M_{\mid\!\sim(\Delta)} \cap M_\Gamma = \mu(M_\Delta) \cap M_\Gamma \subseteq \mu(M_\Gamma) = M_{\mid\!\sim(\Gamma)}$.
Ainsi, par ($\mid\!\sim$1), on obtient que $\mid\!\sim(\Gamma) = \vdash(\mid\!\sim(\Gamma)) = T(M_{\mid\!\sim(\Gamma)}) \subseteq T(M_{\mid\!\sim(\Delta),\Gamma}) = \vdash(\mid\!\sim(\Delta), \Gamma)$.

Preuve de (5). Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et que $M_\Gamma = M_\Delta$.
Alors, $\vdash(\Gamma) = \vdash(\Delta)$. Donc, par ($\mid\!\sim$0), $M_{\mid\!\sim(\Gamma)} = M_{\mid\!\sim(\Delta)}$.

Preuve de (6). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors, par ($\mid\!\sim$2), $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\!\sim(\Gamma)} \subseteq M_\Gamma$.
En conséquence, μ est une fonction de sélection. De plus, μ est clairement PrD.

Preuve de (7). Soient $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$.
Alors, par ($\mid\!\sim$13), on obtient que $\mu(M_\Delta) \cap M_\Gamma = M_{\mid\!\sim(\Delta)} \cap M_\Gamma = M_{\mid\!\sim(\Delta),\Gamma} \subseteq M_{\mid\!\sim(\Gamma)} = \mu(M_\Gamma)$.

Preuve de (8). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Alors, par ($\mid\!\sim$1), $\mid\!\sim(\Gamma) = \vdash(\mid\!\sim(\Gamma)) = T(M_{\mid\!\sim(\Gamma)}) = T(\mu(M_\Gamma))$. ∎

4.2 Le cas non-discriminant et pas nécessairement PrD

Dans cette section, on étudie en particulier la famille de toutes les relations de conséquence pivotantes. A la différence de la section 4.1, les fonctions de sélection considérées ici ne préservent pas forcément la définissabilité. En conséquence, de nouveau, on ne dispose pas de l'égalité suivante : $\mu(M_\Gamma) = M_{\mid\!\sim(\Gamma)}$. Du coup, on arrive pas à traduire des propriétés comme la cohérence forte en termes syntaxiques.

Cependant, on mettra en évidence, dans le chapitre 5, certaines limites à ce qui peut être fait ici. Approximativement, on montrera dans un cadre classique infini, que la famille mentionnée plus haut n'admet pas de caractérisations contenant seulement des conditions quantifiées universellement et de taille limitée.

On va produire une solution avec des conditions semi-syntaxiques. Pour cela, on va développer des techniques similaires à celles de la section 3.2. L'idée est de construire pour toute fonction f, une fonction de sélection FC ν_f telle que si f “recouvre” n'importe quelle fonction de sélection FC, alors elle recouvre nécessairement ν_f.

Définition 51 Soient $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$, $\mathbf{W} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$ et f une fonction de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$.
On note ν_f la fonction de $\mathbf{V}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{V}$,

$$\nu_f(V) = \{v \in V : \forall\, W \in \mathbf{V},\ \text{si } v \in W,\ \text{alors } v \in f(W)\}.$$

Lemme 52 Soit $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$, $\mathbf{W} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$ et f une fonction de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$.
Alors, ν_f est une fonction de sélection FC.

Preuve ν_f est clairement une fonction de sélection. On montre qu'elle est FC.
Supposons le contraire, i.e. $\exists\, V, W \in \mathbf{V}$ et $\exists\, v \in \nu_f(W) \cap V$, $v \notin \nu_f(V)$.
Alors, comme $v \in V$ et $v \notin \nu_f(V)$, on a que $\exists\, Z \in \mathbf{V}$, $v \in Z$, et $v \notin f(Z)$.
Ainsi, simplement par définition de ν_f, $v \notin \nu_f(W)$, ce qui est impossible. ∎

Lemme 53 Soit $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ et $\mathbf{X}$ des sous-ensembles de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, f une fonction de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{W}$, et μ une fonction de sélection FC de $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{X}$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{V}$, $f(V) = M_{T(\mu(V))}$.
Alors :

(0) $\forall V \in \mathbf{V}, f(V) = M_{T(\nu_f(V))}$.

Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ est une structure sémantique satisfaisant $(A0)$, que $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{V}$ et que μ est UC. Alors :

(1) $\nu_f(\mathcal{V}) = \mu(\mathcal{V})$.

Preuve *Preuve de* (0). Supposons que $V \in \mathbf{V}$. On montre que $f(V) = M_{T(\nu_f(V))}$.
Cas 1 : $\exists\, v \in \mu(V), v \notin \nu_f(V)$.
Comme $\mu(V) \subseteq V$, on a que $v \in V$.
Donc, par définition de ν_f, $\exists\, W \in \mathbf{V}$, $v \in W$ et $v \notin f(W) = M_{T(\mu(W))} \supseteq \mu(W)$.
D'autre part, comme μ est FC, on a que $\mu(V) \cap W \subseteq \mu(W)$. Donc, $v \in \mu(W)$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $\mu(V) \subseteq \nu_f(V)$.
Cas 2.1 : $\exists\, v \in \nu_f(V), v \notin f(V)$.
Alors, $\exists\, W \in \mathbf{V}$, $v \in W$, et $v \notin f(W)$.
En effet, il suffit de prendre V lui-même pour le choix de W.
Ainsi, par définition de ν_f, $v \notin \nu_f(V)$, ce qui est impossible.
Cas 2.2 : $\nu_f(V) \subseteq f(V)$.
Alors, $f(V) = M_{T(\mu(V))} \subseteq M_{T(\nu_f(V))} \subseteq M_{T(f(V))} = M_{T(M_{T(\mu(V))})} = M_{T(\mu(V))} = f(V)$.

Preuve de (1). Direction : "$\subseteq$".
Supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, i.e. $\exists\, v \in \nu_f(\mathcal{V}), v \notin \mu(\mathcal{V})$.
Alors, $v \in \mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V})$. Or, comme μ est UC, on a que $\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V}) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{V}$.
D'autre part, comme $v \in \nu_f(\mathcal{V})$, on obtient que $\forall\, W \in \mathbf{V},$ si $v \in W,$ alors $v \in f(W)$.
Ainsi, $v \in f(\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V})) = M_{T(\mu(\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V})))}$.
Mais, on montrera que :
(1.0) $\quad \mu(\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V})) = \emptyset$.
Ainsi, $M_{T(\mu(\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V})))} = M_{T(\emptyset)} = M_{\mathcal{F}}$.
Or, par $(A0)$, on a que $M_{\mathcal{F}} = \emptyset$. Ainsi, $v \in \emptyset$, ce qui est impossible.
Direction : "$\supseteq$".
Supposons que le contraire est vrai, i.e. $\exists\, v \in \mu(\mathcal{V}), v \notin \nu_f(\mathcal{V})$.
Comme $v \in \mathcal{V}$ et $v \notin \nu_f(\mathcal{V})$, on obtient que $\exists\, W \in \mathbf{V}$, $v \in W$ et $v \notin f(W) = M_{T(\mu(W))} \supseteq \mu(W)$.
Or, comme μ est FC, on a que $\mu(\mathcal{V}) \cap W \subseteq \mu(W)$. Ainsi, $v \in \mu(W)$, ce qui est impossible.

Preuve de (1.0). Supposons le contraire, i.e. $\exists\, v \in \mu(\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V}))$.
Comme μ est FC, on a que $\mu(\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V})) \cap \mathcal{V} \subseteq \mu(\mathcal{V})$. Donc, $v \in \mu(\mathcal{V})$. Ainsi, $v \notin \mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V})$.
Or, $\mu(\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V})) \subseteq \mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V})$. Donc, $v \notin \mu(\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V}))$, ce qui est impossible. ∎

Définition 54 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
Alors, on considère les conditions suivantes : $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$,

$(\mid\!\sim 14)$ $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F},$ si $v \in M_\Delta,$ alors $v \in M_{\mid\sim(\Delta)}\})$;

$(\mid\!\sim 15)$ $\mathcal{V} \setminus \{v \in \mathcal{V} : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F},$ si $v \in M_\Delta,$ alors $v \in M_{\mid\sim(\Delta)}\} \in \mathbf{D}$.

Proposition 55 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Alors :

(0) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence pivotante ssi $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 14)$.

Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ satisfait $(A0)$. Alors :

(1) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence pivotante UC ssi $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim 14$) et ($\mid\!\sim 15$).

Preuve *Preuve de* (0). Direction : "$\rightarrow$"
Il existe une fonction de sélection FC μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma))$.
Soit f la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{D}$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{D}$, $f(V) = M_{T(\mu(V))}$.
Par le lemme 53, on a que $\forall\, V \in \mathbf{D}$, $f(V) = M_{T(\nu_f(V))}$.
Notons que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{T(\mu(M_\Gamma))} = M_{\mid\sim(\Gamma)}$.
On montre que ($\mid\!\sim 14$) est satisfaite. Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$.
Alors, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma)) = T(M_{T(\mu(M_\Gamma))}) = T(f(M_\Gamma)) = T(M_{T(\nu_f(M_\Gamma))}) = T(\nu_f(M_\Gamma)) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, W \in \mathbf{D}$, si $v \in W$, alors $v \in f(W)\}) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta$, alors $v \in f(M_\Delta)\}) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta$, alors $v \in M_{\mid\sim(\Delta)}\})$.
Direction : "$\leftarrow$".
Supposons que $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim 14$).
Soit f la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{D}$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\mid\sim(\Gamma)}$.
Notons que f est bien définie. En effet, si $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et $M_\Gamma = M_\Delta$, alors, par ($\mid\!\sim 14$), $\mid\!\sim(\Gamma) = \mid\!\sim(\Delta)$.
De plus, par ($\mid\!\sim 14$), on a clairement que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\nu_f(M_\Gamma))$.
Enfin, par le lemme 52, on a que ν_f est une fonction de sélection FC.

Preuve de (1). Direction : "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf qu'en plus $(A0)$ est satisfaite et μ est UC.
On montre que $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim 15$). Comme μ est UC, on a que $\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V}) \in \mathbf{D}$. Or, par le lemme 53,
$\mu(\mathcal{V}) = \nu_f(\mathcal{V}) =$
$\{v \in \mathcal{V} : \forall\, W \in \mathbf{D}$, si $v \in W$, alors $v \in f(W)\} =$
$\{v \in \mathcal{V} : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta$, alors $v \in f(M_\Delta)\} =$
$\{v \in \mathcal{V} : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta$, alors $v \in M_{\mid\sim(\Delta)}\}$.
Direction : "$\leftarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf qu'en plus $(A0)$ et ($\mid\!\sim 15$) sont satisfaites.
Maintenant, grâce à ($\mid\!\sim 15$), on a que $\mathcal{V} \setminus \nu_f(\mathcal{V}) \in \mathbf{D}$. Donc, ν_f est UC.
Enfin, notons que dans cette direction $(A0)$ n'est pas utilisée. ∎

4.3 Le cas discriminant et PrD

Dans cette section, on caractérisera des relations de conséquence pivotantes-discriminantes PrD. Pour cela, on appliquera les lemmes 44 et 45 (énoncés dans la section 3.3).

Définition 56 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ un connecteur binaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
Alors, on considère la condition suivante : $\forall\, \Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}$,

($\mid\!\sim 16$) $\mid\!\sim(\Gamma) \cup H(\Gamma) \subseteq \vdash(\Delta, \mid\!\sim(\Delta), H(\Delta), \Gamma)$.

De nouveau, cette condition est syntaxique si un système formel est disponible pour $\vdash$.

Proposition 57 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ et $\wedge$ des connecteurs binaires de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A3)$ et $(A1)$, et $\mid\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Alors :

(0) $\mid\sim$ est une relation de conséquence pivotante-discriminante PrC et PrD ssi $\mid\sim$ satisfait $(\mid\sim 0)$, $(\mid\sim 6)$, $(\mid\sim 7)$, $(\mid\sim 8)$, $(\mid\sim 16)$ et $(\mid\sim 11)$.

Supposons que $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ satisfait $(A2)$. Alors :

(1) $\mid\sim$ est une relation de conséquence pivotante-discriminante PrD ssi $\mid\sim$ satisfait $(\mid\sim 0)$, $(\mid\sim 6)$, $(\mid\sim 7)$, $(\mid\sim 8)$ et $(\mid\sim 16)$.

Preuve *Preuve de* (0). Direction : "$\rightarrow$".
Il existe une fonction de sélection PrC, PrD et FC μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma))$.
On montrera que :
(0.0) $\mid\sim$ satisfait $(\mid\sim 0)$.
Par le lemme 45 (1), (2) et (3), $\mid\sim$ satisfait $(\mid\sim 6)$, $(\mid\sim 7)$ et $(\mid\sim 8)$.
Par le lemme 45 (10) et la propriété de cohérence forte de μ, $\mid\sim$ satisfait $(\mid\sim 16)$.
On montrera que :
(0.1) $\mid\sim$ satisfait $(\mid\sim 11)$.
Direction : "$\leftarrow$".
Supposons que $\mid\sim$ satisfait $(\mid\sim 0)$, $(\mid\sim 6)$, $(\mid\sim 7)$, $(\mid\sim 8)$, $(\mid\sim 16)$ et $(\mid\sim 11)$.
Soit μ la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mu(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
On montrera que :
(0.2) μ est bien définie.
Clairement, μ est une fonction de sélection PrD.
De plus, comme $\mid\sim$ satisfait $(\mid\sim 16)$, μ est fortement cohérente.
On montrera que :
(0.3) μ est PrC.
Enfin, par le lemme 44 (7), $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma))$.

Preuve de (0.0). Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et que $\vdash(\Gamma) = \vdash(\Delta)$. Alors, $M_\Gamma = M_\Delta$.
Ainsi, $\mid\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma)) = T_d(\mu(M_\Delta)) = \mid\sim(\Delta)$.

Preuve de (0.1). Supposons que $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ et que Γ est consistant.
Alors, $M_\Gamma \in \mathbf{D} \cap \mathbf{C}$. Donc, comme μ est PrC, on a que $\mu(M_\Gamma) \in \mathbf{C}$.
Ainsi, $T_d(\mu(M_\Gamma)) = T(\mu(M_\Gamma))$.
En conséquence, $\Gamma \subseteq T(M_\Gamma) \subseteq T(\mu(M_\Gamma)) = T_d(\mu(M_\Gamma)) = \mid\sim(\Gamma)$.
De plus, $M_{\mid\sim(\Gamma)} = M_{T_d(\mu(M_\Gamma))} = M_{T(\mu(M_\Gamma))}$. Or, $\mu(M_\Gamma) \in \mathbf{C}$. Donc, $M_{T(\mu(M_\Gamma))} \in \mathbf{C}$.
En conséquence, $\mid\sim(\Gamma)$ est consistant.
Enfin, $\mid\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma)) = T(\mu(M_\Gamma)) = T(M_{T(\mu(M_\Gamma))}) = T(M_{\mid\sim(\Gamma)}) = \vdash(\mid\sim(\Gamma))$.

Preuve de (0.2). Supposons que $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}$ et que $M_\Gamma = M_\Delta$.
Alors, $\vdash(\Gamma) = \vdash(\Delta)$. Donc, par $(\mid\sim 0)$, on a que $\mid\sim(\Gamma) = \mid\sim(\Delta)$.
En conséquence, $H(\Gamma) = H(\Delta)$. Ainsi, $M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)} = M_{\Delta, \mid\sim(\Delta), H(\Delta)}$.

Preuve de (0.3). Supposons que $V \in \mathbf{D} \cap \mathbf{C}$. Alors, $\exists\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $V = M_\Gamma$.

Cas 1 : $H_1(\Gamma) \neq \emptyset$.
Alors, $\exists\, \beta \in \mathcal{F}$, $\beta \notin {\mid\!\sim}(\Gamma)$ et $M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)} \subseteq M_\beta$.
Par $({\mid\!\sim}11)$, $\Gamma \subseteq {\mid\!\sim}(\Gamma)$ et $\vdash({\mid\!\sim}(\Gamma)) = {\mid\!\sim}(\Gamma)$. Donc, $M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma)} = M_{{\mid\sim}(\Gamma)}$. Donc, $M_{{\mid\sim}(\Gamma)} \subseteq M_\beta$.
Ainsi, $\beta \in T(M_{{\mid\sim}(\Gamma)}) = \vdash({\mid\!\sim}(\Gamma)) = {\mid\!\sim}(\Gamma)$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $H_1(\Gamma) = \emptyset$.
Alors, $H(\Gamma) = \emptyset$. Donc, $\mu(V) = \mu(M_\Gamma) = M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),H(\Gamma)} = M_{{\mid\sim}(\Gamma)}$.
Or, par $({\mid\!\sim}11)$, ${\mid\!\sim}(\Gamma)$ est consistant. Ainsi, $M_{{\mid\sim}(\Gamma)} \in \mathbf{C}$.

Preuve de (1). Direction : "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf que μ n'est plus PrC, tandis que $(A2)$ est satisfaite.
Notons que dans (0), PrC n'est utilisée que pour montrer $({\mid\!\sim}16)$ et $({\mid\!\sim}11)$.
Mais, on n'a plus besoin de montrer $({\mid\!\sim}11)$.
D'autre part, par le lemme 45 (9) and la cohérence forte de μ, on a que $({\mid\!\sim}16)$ est satisfaite.
Direction : "$\leftarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (0), sauf que $({\mid\!\sim}11)$ n'est plus satisfaite, mais $(A2)$ si.
Cependant, dans (0), $({\mid\!\sim}11)$ n'est utilisée que pour montrer que μ est PrC, ce qui n'est plus nécessaire.
Enfin, notons qu'on a pas besoin d'utiliser $(A2)$ dans cette direction. ∎

4.4 Le cas discriminant et pas nécessairement PrD

Une fois encore, comme on n'a pas la préservation de la définissabilité, on arrive pas à établir l'égalité suivante : $\mu(M_\Gamma) = M_{\Gamma,{\mid\sim}(\Gamma),H(\Gamma)}$. De nouveau, on produira des solutions avec des conditions semi-syntaxiques, grâce aux lemmes 52 et 53 (énoncés dans la section 4.2).

Définition 58 Soit $\mathcal{L}$ un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et ${\mid\!\sim}$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
Alors, on considère les conditions suivantes : $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$,

$({\mid\!\sim}17)$ $\vdash(\Gamma, {\mid\!\sim}(\Gamma), H(\Gamma)) = T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F},\ \text{si } v \in M_\Delta,\ \text{alors } v \in M_{{\mid\sim}(\Delta),H(\Delta)}\})$;

$({\mid\!\sim}18)$ $\mathcal{V} \setminus \{v \in \mathcal{V} : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F},\ \text{si } v \in M_\Delta,\ \text{alors } v \in M_{{\mid\sim}(\Delta),H(\Delta)}\} \in \mathbf{D}$.

Proposition 59 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\neg$ un connecteur unaire de $\mathcal{L}$, $\vee$ et $\wedge$ des connecteurs binaires de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A3)$ et $(A1)$, et ${\mid\!\sim}$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$. Alors :

(0) ${\mid\!\sim}$ est une relation de conséquence pivotante-discriminante PrC ssi ${\mid\!\sim}$ satisfait $({\mid\!\sim}0)$, $({\mid\!\sim}6)$, $({\mid\!\sim}7)$, $({\mid\!\sim}8)$, $({\mid\!\sim}11)$ et $({\mid\!\sim}17)$.

Si $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ satisfait aussi $(A0)$, alors :

(1) ${\mid\!\sim}$ est une relation de conséquence pivotante-discriminante PrC et UC ssi ${\mid\!\sim}$ satisfait $({\mid\!\sim}0)$, $({\mid\!\sim}6)$, $({\mid\!\sim}7)$, $({\mid\!\sim}8)$, $({\mid\!\sim}11)$, $({\mid\!\sim}17)$ et $({\mid\!\sim}18)$.

Si $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ satisfait aussi $(A2)$, alors :

(2) ${\mid\!\sim}$ est une relation de conséquence pivotante-discriminante ssi ${\mid\!\sim}$ satisfait $({\mid\!\sim}0)$, $({\mid\!\sim}6)$, $({\mid\!\sim}7)$, $({\mid\!\sim}8)$ et $({\mid\!\sim}17)$.

Si $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ satisfait aussi $(A0)$ et $(A2)$, alors :

(3) $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence pivotante-discriminante UC ssi $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$0), ($\mid\!\sim$6), ($\mid\!\sim$7), ($\mid\!\sim$8), ($\mid\!\sim$17) et ($\mid\!\sim$18).

Preuve *Preuve de* (2). Direction : "$\rightarrow$".
Il existe une fonction de sélection FC μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma))$.
Alors, $\mid\!\sim$ satisfait clairement ($\mid\!\sim$0).
Soit f la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{D}$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{D}$, $f(V) = M_{T(\mu(V))}$.
Alors, par le lemme 53, $\forall\, V \in \mathbf{D}$, $f(V) = M_{T(\nu_f(V))}$.
D'autre part, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{T(\mu(M_\Gamma))} \subseteq M_{T(M_\Gamma)} = M_\Gamma$.
Ainsi, f est une fonction de sélection.
Clairement, f est PrD.
De plus, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(\mu(M_\Gamma)) = T_d(M_{T(\mu(M_\Gamma))}) = T_d(f(M_\Gamma))$.
En conséquence, par le lemme 45 (1), (2) et (3), $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$6), ($\mid\!\sim$7) et ($\mid\!\sim$8).
De plus, par le lemme 45 (9), $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
On montre que $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$17). Soit $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$.
Alors, $\vdash(\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)) = T(M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)}) = T(f(M_\Gamma)) = T(M_{T(\nu_f(M_\Gamma))}) = T(\nu_f(M_\Gamma)) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, W \in \mathbf{D}$, si $v \in W$, alors $v \in f(W)\}) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta$, alors $v \in f(M_\Delta)\}) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta$, alors $v \in M_{\Delta, \mid\sim(\Delta), H(\Delta)}\}) =$
$T(\{v \in M_\Gamma : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F},$ si $v \in M_\Delta,$ alors $v \in M_{\mid\sim(\Delta), H(\Delta)}\})$.
Direction : "$\leftarrow$".
Supposons que ($\mid\!\sim$0), ($\mid\!\sim$6), ($\mid\!\sim$7), ($\mid\!\sim$8) et ($\mid\!\sim$17) sont satisfaites.
Soit f la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{D}$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
Par ($\mid\!\sim$0), f est bien définie.
Par le lemme 44 (7), $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)}) = T_d(f(M_\Gamma))$.
Par ($\mid\!\sim$17), on a que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{T(\nu_f(M_\Gamma))}$.
Ainsi, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T_d(f(M_\Gamma)) = T_d(M_{T(\nu_f(M_\Gamma))}) = T_d(\nu_f(M_\Gamma))$.
Or, par le lemme 52, ν_f est une fonction de sélection FC.

Preuve de (3). Direction : "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (2), sauf qu'en plus $(A0)$ est satisfaite et μ est UC.
On montre que ($\mid\!\sim$18) est satisfaite. Comme μ est UC, on a que $\mathcal{V} \setminus \mu(\mathcal{V}) \in \mathbf{D}$.
Or, par le lemme 53 (1), on obtient que $\mu(\mathcal{V}) = \nu_f(\mathcal{V}) =$
$\{v \in \mathcal{V} : \forall\, W \in \mathbf{D}$, si $v \in W$, alors $v \in f(W)\} =$
$\{v \in \mathcal{V} : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F}$, si $v \in M_\Delta$, alors $v \in f(M_\Delta)\} =$
$\{v \in \mathcal{V} : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F},$ si $v \in M_\Delta,$ alors $v \in M_{\Delta, \mid\sim(\Delta), H(\Delta)}\} =$
$\{v \in \mathcal{V} : \forall\, \Delta \subseteq \mathcal{F},$ si $v \in M_\Delta,$ alors $v \in M_{\mid\sim(\Delta), H(\Delta)}\}$.
Direction : "$\leftarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (2), sauf qu'en plus $(A0)$ est satisfaite et $\mid\!\sim$ satisfait ($\mid\!\sim$18).
Or, grâce à ($\mid\!\sim$18), on a que $\mathcal{V} \setminus \nu_f(\mathcal{V}) \in \mathbf{D}$. Donc, ν_f est UC.
Notons que $(A0)$ est inutilisée dans cette direction.

Preuve de (0). Direction : "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (2), sauf que $(A2)$ n'est plus satisfaite, tandis que μ est PrC.
Notons que $(A2)$ n'est utilisée dans (2) que pour appliquer le lemme 45 (9) afin d'obtenir que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.

A présent, on va obtenir cette égalité par un autre moyen.
En effet, si $V \in \mathbf{D} \cap \mathbf{C}$, alors, comme μ est PrC, $\mu(V) \in \mathbf{C}$, donc $M_{T(\mu(V))} \in \mathbf{C}$, donc $f(V) \in \mathbf{C}$.
Donc, f est PrC.
En conséquence, par le lemme 45 (10), on obtient que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
De plus, par la même preuve (verbatim) que pour (0.1) de la proposition 57, $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 11)$.

Direction : "$\leftarrow$".

Même preuve (verbatim) que pour (2), sauf que $(A2)$ n'est plus satisfaite, mais $(\mid\!\sim 11)$ est satisfaite.
En fait, dans cette direction, $(A2)$ n'a pas été utilisée dans (2).
Il reste à montrer que ν_f est PrC.
Par la même preuve (verbatim) que pour (0.3) de la proposition 57, on obtient que f est PrC.
Soit $V \in \mathbf{D} \cap \mathbf{C}$. Alors, $f(V) \in \mathbf{C}$. Donc, $M_{T(\nu_f(V))} \in \mathbf{C}$. Donc, $\nu_f(V) \in \mathbf{C}$ et c'est terminé.

Preuve de (1). Direction : "$\rightarrow$".
Même preuve (verbatim) que pour (2), sauf que $(A2)$ n'est plus vérifiée, tandis que maintenant $(A0)$ est satisfaite et μ est UC et PrC.
Notons que $(A2)$ n'est utilisée dans (2) que pour appliquer le lemme 45 (9) afin d'obtenir que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
Mais, par la même preuve (verbatim) que pour (0), on obtient de toutes façons que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $f(M_\Gamma) = M_{\Gamma, \mid\!\sim(\Gamma), H(\Gamma)}$.
De plus, par la même preuve (verbatim) que pour (0.1) de la proposition 57, $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 11)$.
Enfin, par la même preuve (verbatim) que pour (3), on a que $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 18)$.

Direction : "$\leftarrow$".

Même preuve (verbatim) que pour (2), sauf que $(A2)$ n'est plus vérifiée, tandis que maintenant $(A0)$ est satisfaite et $\mid\!\sim$ satisfait $(\mid\!\sim 11)$ et $(\mid\!\sim 18)$.
Mais, dans cette direction, $(A2)$ n'a pas été utilisée dans (2).
De plus, par la même preuve (verbatim) que pour (0), ν_f est PrC.
Enfin, grâce à $(\mid\!\sim 18)$, on a que $\mathcal{V} \setminus \nu_f(\mathcal{V}) \in \mathbf{D}$. Donc, ν_f est UC.
Notons qu'on a pas besoin de $(A0)$ dans cette direction. $\blacksquare$

Chapitre 5

Inexistence de caractérisations normales

5.1 Définition

Soient $\mathcal{F}$ un ensemble, $\mathcal{R}$ un ensemble de relations sur $\mathcal{P}(\mathcal{F})\times\mathcal{F}$ et $\mid\!\sim$ une relation sur $\mathcal{P}(\mathcal{F})\times\mathcal{F}$. Approximativement, une caractérisation de $\mathcal{R}$ est dite “normale” ssi elle ne contient que des conditions quantifiées universellement et “appliquant” $\mid\!\sim$ au plus $|\mathcal{F}|$ fois. Plus précisément,

Définition 60 Soient $\mathcal{F}$ un ensemble et $\mathcal{R}$ un ensemble de relations sur $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
$\mathcal{C}$ est une *caractérisation normale* de $\mathcal{R}$ ssi $\mathcal{C} = (\lambda, \Phi)$, où $\lambda \leq |\mathcal{F}|$ est un cardinal (fini ou infini) et Φ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F})^{2\lambda}$ telle que pour toute relation $\mid\!\sim$ de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$, on a

$$\mid\!\sim \in \mathcal{R} \text{ ssi } \forall\, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda \subseteq \mathcal{F},\ (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda, \mid\!\sim(\Gamma_1), \ldots, \mid\!\sim(\Gamma_\lambda)) \in \Phi.$$

A présent, supposons qu'il n'existe pas de caractérisations normales de $\mathcal{R}$. Voici des exemples (i.e. $(C1)$, $(C2)$ et $(C3)$ plus bas) qui donneront au lecteur (on l'espère) une bonne idée des conditions qui ne peuvent pas caractériser $\mathcal{R}$. Ainsi, cela rendra plus claires les limites de nos résultats d'impossibilité (la proposition 62 plus bas). Pour commencer, considérons la conditions suivante :

$(C1)$ $\forall\, \Gamma, \Delta \in \mathbf{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F})$, $\mid\!\sim(\Gamma \cup \mid\!\sim(\Delta)) = \emptyset$.

Alors, $(C1)$ ne peut pas caractériser $\mathcal{R}$. En effet, supposons le contraire, i.e.
supposons que $\mid\!\sim \in \mathcal{R}$ ssi $\forall\, \Gamma, \Delta \in \mathbf{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma \cup \mid\!\sim(\Delta)) = \emptyset$.
Alors, prenons $\lambda = 3$ et Φ tel que $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6) \in \Phi$ ssi
$(\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbf{F}$ et $\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \Gamma_5)$ impliquent $\Gamma_6 = \emptyset$.
Alors, $(3, \Phi)$ est une caractérisation normale de $\mathcal{R}$. On fourni la preuve (très facile) de cela, ainsi le lecteur pourra vérifier qu'une bonne relation Φ peut être trouvée immédiatement pour toute condition simple comme $(C1)$.

Preuve Direction : “$\rightarrow$”.
Supposons que $\mid\!\sim \in \mathcal{R}$.
Alors, $\forall\, \Gamma, \Delta \in \mathbf{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma \cup \mid\!\sim(\Delta)) = \emptyset$.
Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \subseteq \mathcal{F}$.
On montre que $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mid\!\sim(\Gamma_1), \mid\!\sim(\Gamma_2), \mid\!\sim(\Gamma_3)) \in \Phi$.
Supposons que $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbf{F}$ et $\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \mid\!\sim(\Gamma_2)$.
Alors, comme $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbf{F}$, on obtient que $\mid\!\sim(\Gamma_1 \cup \mid\!\sim(\Gamma_2)) = \emptyset$.
Or, $\mid\!\sim(\Gamma_1 \cup \mid\!\sim(\Gamma_2)) = \mid\!\sim(\Gamma_3)$. Ainsi, $\mid\!\sim(\Gamma_3) = \emptyset$.

Direction : "$\leftarrow$".
Supposons que $\forall\, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \subseteq \mathcal{F},\ (\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_1), \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_2), \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_3)) \in \Phi$.
On montre que $\mathrel{|\!\sim} \in \mathcal{R}$. Soient $\Gamma, \Delta \in \mathbf{F}$.
Prenons $\Gamma_1 = \Gamma, \Gamma_2 = \Delta, \Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_2)$.
Alors, $\Gamma_1 \in \mathbf{F}, \Gamma_2 \in \mathbf{F}$ et $\Gamma_3 = \Gamma_1 \cup \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_2)$.
Or, on a que $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_1), \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_2), \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_3)) \in \Phi$.
Ainsi, par définition de Φ, on a $\mathrel{|\!\sim}(\Gamma_3) = \emptyset$.
Or, $\mathrel{|\!\sim}(\Gamma_3) = \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_1 \cup \mathrel{|\!\sim}(\Gamma_2)) = \mathrel{|\!\sim}(\Gamma \cup \mathrel{|\!\sim}(\Delta))$. ∎

En fait, on n'est pas limité à des conditions simples (i.e. n'utilisant que des opérations élémentaires comme $\cup$, $\cap$, $\setminus$). Des conditions plus complexes que $(C1)$ sont aussi exclues. Par exemple, soit f n'importe quelle fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$. Considérons la condition suivante :

$(C2)\ \ \forall\, \Gamma, \Delta \in \mathbf{F}, \mathrel{|\!\sim}(f(\Gamma) \cup \mathrel{|\!\sim}(\Delta)) = \emptyset$.

Alors, $(C2)$ ne peut pas caractériser $\mathcal{R}$. En effet, supposons qu'elle caractérise $\mathcal{R}$.
Alors, prenons $\lambda = 3$ et Φ telle que $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6) \in \Phi$ ssi
$(\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbf{F}$ et $\Gamma_3 = f(\Gamma_1) \cup \Gamma_5)$ impliquent $\Gamma_6 = \emptyset$.
Alors $(3, \Phi)$ est une caractérisation normale de $\mathcal{R}$. La preuve facile de cela est laissée au lecteur.

On peut même aller plus loin en combinant des quantificateurs universels (pas existentiels) et des fonctions comme f. Par exemple, supposons que $\mathcal{G}$ un ensemble de fonctions de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ et considérons la condition suivante :

$(C3)\ \ \forall\, \Gamma, \Delta \in \mathbf{F}, \forall\, f \in \mathcal{G}, \mathrel{|\!\sim}(f(\Gamma) \cup \mathrel{|\!\sim}(\Delta)) = \emptyset$.

Alors, $(C3)$ ne peut pas caractériser $\mathcal{R}$. En effet, supposons que c'est le cas.
Alors, prenons $\lambda = 3$ et Φ telle que $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6) \in \Phi$ ssi
$\forall\, f \in \mathcal{G}$, si $(\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbf{F}$ et $\Gamma_3 = f(\Gamma_1) \cup \Gamma_5)$, alors $\Gamma_6 = \emptyset$.
Alors, $(3, \Phi)$ est une caractérisation normale de $\mathcal{R}$. De nouveau, on laisse la preuve facile de cela au lecteur.

Enfin, un bon exemple de condition qui n'est pas exclue est $(\mathrel{|\!\sim}14)$. On a vu dans la proposition 55 qu'elle caractérise la famille de toutes relations de conséquence pivotantes.

5.2 Résultats d'impossibilité

On va montrer, dans un cadre classique infini, qu'il n'existe pas de caractérisations normales pour la famille de toutes les relations de conséquence pivotantes (autrement dit, $(\mathrel{|\!\sim}14)$ ne peut pas être remplacée par une condition plus simple dans la proposition 55). Ce résultat a été publié dans [BN05a]. Dans la même veine, Schlechta a montré qu'il n'y a pas de caractérisations normales pour la famille de toutes les relations de conséquence préférentielles (proposition 5.2.15 de [Sch04]).

Notons qu'il utilisa le mot "normal" dans un sens plus restreint (voir la section 1.6.2.1 de [Sch04]). Approximativement, une caractérisation de $\mathcal{R}$ est appelée normale par Schlechta ssi elle contient seulement des conditions comme $(C1)$, i.e. des conditions quantifiées universellement, "appliquant" $\mathrel{|\!\sim}$ au plus $|\mathcal{F}|$ fois, et utilisant seulement des opérateurs élémentaires comme $\cup$, $\cap$, $\setminus$ (les structures et fonctions complexes, etc. ne sont pas autorisées). On a été inspiré par les techniques de Schlechta. On aura besoin notamment du lemme 5.2.14 de [Sch04] :

Lemme 61 [Sch04] Supposons que $\mathcal{A}$ est infini, que $(\mathcal{F}_c, \mathcal{V}, \models)$ est une structure sémantique propositionnelle classique et que $\mathbf{V} \subseteq \{V \subseteq \mathcal{V} : |V| \leq |\mathcal{A}|\}$ est tel que :

si $V \in \mathbf{V}$ et $W \subseteq V$, alors $W \in \mathbf{V}$;
$\forall\, V, W \in \mathbf{V}$, si $|V \cup W| \leq |\mathcal{A}|$, alors $V \cup W \in \mathbf{V}$.
Alors, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}_c$, $\exists\, V_\Gamma \in \mathbf{V}$,
(0) $T(\bigcap_{V \in \mathbf{V}} M_{T(M_\Gamma \setminus V)}) = T(M_\Gamma \setminus V_\Gamma)$;
(1) $\forall\, V \in \mathbf{V}, T(M_\Gamma \setminus V) \subseteq T(M_\Gamma \setminus V_\Gamma)$.

Rappelons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}_c$ ont été introduits dans la section 2.1.2. Notons que l'indice Γ dans V_Γ est marqué juste pour garder à l'esprit que V_Γ dépend de Γ.

Proposition 62 Supposons que $\mathcal{A}$ est infini et que $(\mathcal{F}_c, \mathcal{V}, \models)$ est une structure sémantique propositionnelle classique.
Alors, il n'existe pas de caractérisations normales pour la famille de toutes les relations de conséquence pivotantes.

Preuve Supposons le contraire, i.e. supposons qu'il existe un cardinal $\lambda \leq |\mathcal{F}_c|$ et une relation Φ sur $\mathcal{P}(\mathcal{F}_c)^{2\lambda}$ tels que pour toute relation $\mid\!\sim$ on $\mathcal{P}(\mathcal{F}_c) \times \mathcal{F}_c$, $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence pivotante ssi $\forall\, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda \subseteq \mathcal{F}_c$, $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda, \mid\!\sim(\Gamma_1), \ldots, \mid\!\sim(\Gamma_\lambda)) \in \Phi$. Alors, définissons :
$\mathbf{V} := \{V \subseteq \mathcal{V} : |V| \leq |\mathcal{A}|\}$.
De plus, soit $\mid\!\sim$ la relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}_c) \times \mathcal{F}_c$ telle que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}_c$,
$\mid\!\sim(\Gamma) = T(\bigcap_{V \in \mathbf{V}} M_{T(M_\Gamma \setminus V)})$.
On montrera que :
(0) $\forall\, V \subseteq \mathcal{V}$, si $|V| \leq |\mathcal{A}|$, alors $T(\mathcal{V}) = T(\mathcal{V} \setminus V)$;
(1) $\exists\, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda \subseteq \mathcal{F}_c$ tels que $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda, \mid\!\sim(\Gamma_1), \ldots, \mid\!\sim(\Gamma_\lambda)) \notin \Phi$.
A présent, par le lemme 61, on obtient que :
(2) $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}_c$, $\exists\, V_\Gamma \in \mathbf{V}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(M_\Gamma \setminus V_\Gamma)$ et $\forall\, V \in \mathbf{V}, T(M_\Gamma \setminus V) \subseteq T(M_\Gamma \setminus V_\Gamma)$.
Alors, définissons :
$\mathcal{X} := \bigcup_{\Gamma \in \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda\}} V_\Gamma$.
On montrera que :
(3) $\forall\, \Gamma \in \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda\}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(M_\Gamma \setminus \mathcal{X})$.
Soit μ la fonction de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{D}$, $\mu(V) = V \setminus \mathcal{X}$.
On montrera que :
(4) μ est une fonction de sélection FC.
Soit $\mid\!\sim'$ la relation de conséquence pivotante définie par μ.
On montrera ce qui suit et qui produit une contradiction finale :
(5) $\mid\!\sim'$ n'est pas une relation de conséquence pivotante.

Preuve de (0). Supposons que $V \subseteq \mathcal{V}$ et $|V| \leq |\mathcal{A}|$.
Clairement, $T(\mathcal{V}) \subseteq T(\mathcal{V} \setminus V)$.
On montre que $T(\mathcal{V} \setminus V) \subseteq T(\mathcal{V})$.
Supposons le contraire, i.e. $\exists\, \alpha \in T(\mathcal{V} \setminus V)$, $\alpha \notin T(\mathcal{V})$.
Alors, $\exists\, v \in \mathcal{V}$, $v \notin M_\alpha$.
A présent, définissons :
$W := \{w \in \mathcal{V}$: pour tout atome q apparaissant dans α, $w(q) = v(q)\}$.
Alors, $\forall\, w \in W$, on a $w(\alpha) = v(\alpha)$ et donc $w \notin M_\alpha$.
Comme le nombre d'atomes apparaissant dans α est fini et comme $\mathcal{A}$ est infini, on obtient que :

$|W| = 2^{|\mathcal{A}|}$.
Ainsi, $|V| \leq |\mathcal{A}| < |W|$. Donc, $\exists\, w \in W \setminus V \subseteq \mathcal{V} \setminus V$.
Donc, $\mathcal{V} \setminus V \not\subseteq M_\alpha$. Ainsi, $\alpha \notin T(\mathcal{V} \setminus V)$, ce qui est impossible.

Preuve de (1). Il suffit de montrer que $\mid\!\sim$ n'est pas une relation de conséquence pivotante.
Supposons le contraire, i.e. il existe une fonction de sélection FC μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}_c$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma))$.
Comme $\mathcal{A}$ est infini, $\exists\, p \in \mathcal{A}$. On montre alors que dans chaque cas on obtient une contradiction :
Cas 1 : $\exists\, v \in \mu(\mathcal{V})$, $v \notin M_p$.
Soit $\Gamma = T(v)$. Alors, $M_\Gamma = \{v\}$.
Comme μ est FC, on a que $\mu(M_\Gamma) = \mu(M_\Gamma) \cap \mathcal{V} \subseteq \mu(\mathcal{V})$. Donc, $\mu(M_\Gamma) \subseteq \mu(\mathcal{V}) \cap M_\Gamma$.
D'autre part, toujours comme μ est FC, on a que $\mu(\mathcal{V}) \cap M_\Gamma \subseteq \mu(M_\Gamma)$.
En conséquence, $\mu(\mathcal{V}) \cap M_\Gamma = \mu(M_\Gamma)$.
Ainsi, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma)) = T(\mu(\mathcal{V}) \cap M_\Gamma) = T(\mu(\mathcal{V}) \cap \{v\}) = T(v)$.
Or, $p \notin T(v)$. Donc, $p \notin \mid\!\sim(\Gamma)$.
Cependant, $M_\Gamma \in \mathbf{V}$. Ainsi, $\bigcap_{V \in \mathbf{V}} M_{T(M_\Gamma \setminus V)} \subseteq M_{T(M_\Gamma \setminus M_\Gamma)} = M_{T(\emptyset)} = M_{\mathcal{F}_c} = \emptyset$.
Donc, par définition de $\mid\!\sim$, on a que $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\emptyset) = \mathcal{F}_c$.
Donc, $p \in \mid\!\sim(\Gamma)$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $\mu(\mathcal{V}) \subseteq M_p$.
Alors, par (0), on a que $\mid\!\sim(\emptyset) = T(\bigcap_{V \in \mathbf{V}} M_{T(\mathcal{V} \setminus V)}) = T(\bigcap_{V \in \mathbf{V}} M_{T(\mathcal{V})}) = T(M_{T(\mathcal{V})}) = T(\mathcal{V})$.
Or, $\mathcal{V} \not\subseteq M_p$. Donc, $p \notin T(\mathcal{V}) = \mid\!\sim(\emptyset)$.
D'autre part, $\mid\!\sim(\emptyset) = T(\mu(M_\emptyset)) = T(\mu(\mathcal{V}))$.
Mais, $\mu(\mathcal{V}) \subseteq M_p$. Donc, $p \in T(\mu(\mathcal{V})) = \mid\!\sim(\emptyset)$, ce qui est impossible.

Preuve de (3). Soit $\Gamma \in \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda\}$. Direction : "$\subseteq$".
On a que $V_\Gamma \subseteq \mathcal{X}$. Donc, $M_\Gamma \setminus \mathcal{X} \subseteq M_\Gamma \setminus V_\Gamma$.
Ainsi, par (2), on obtient que $\mid\!\sim(\Gamma) = T(M_\Gamma \setminus V_\Gamma) \subseteq T(M_\Gamma \setminus \mathcal{X})$.
Direction : "$\supseteq$".
Comme $\mathcal{A}$ est infini, on a que $|\mathcal{A}| = |\mathcal{F}_c|$. Ainsi, $\lambda \leq |\mathcal{A}|$. Donc, $|\mathcal{X}| \leq |\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}|$.
Donc, $\mathcal{X} \in \mathbf{V}$. Ainsi, par (2), on a que $T(M_\Gamma \setminus \mathcal{X}) \subseteq T(M_\Gamma \setminus V_\Gamma) = \mid\!\sim(\Gamma)$.

Preuve de (4). μ est clairement une fonction de sélection. On montre que μ est FC. Soient $V, W \subseteq \mathcal{V}$.
Alors, $\mu(W) \cap V = (W \setminus \mathcal{X}) \cap V = (W \cap V) \setminus \mathcal{X} \subseteq V \setminus \mathcal{X} = \mu(V)$.

Preuve de (5). Par (3), on a que $\forall\, \Gamma \in \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda\}$, $\mid\!\sim'(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma)) = T(M_\Gamma \setminus \mathcal{X}) = \mid\!\sim(\Gamma)$.
Or, $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda, \mid\!\sim(\Gamma_1), \ldots, \mid\!\sim(\Gamma_\lambda)) \notin \Phi$. Ainsi, $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda, \mid\!\sim'(\Gamma_1), \ldots, \mid\!\sim'(\Gamma_\lambda)) \notin \Phi$.
En conséquence, comme (λ, Φ) est une caractérisation normale, $\mid\!\sim'$ n'est pas une relation de conséquence pivotante. ∎

Chapitre 6

Un lien avec les X-logiques

Dans ce chapitre, on étudiera un lien (qui a été publié dans [BN05a]) entre les relations de conséquence pivotantes et les relations de conséquence à base de pertinence (alias X-logiques), lesquelles ont été introduites par Forget, Risch et Siegel [FRS01]. Présentons les. Supposons que certaines formules sont considérées comme étant les seules pertinentes et regroupons les dans un ensemble $\mathcal{E}$. Alors, il est naturel de conclure une formule α d'un ensemble de formules Γ ssi toutes les conséquences basiques et pertinentes de $\Gamma \cup \{\alpha\}$ sont des conséquences basiques de Γ (i.e. l'ajout de α à Γ n'apporte pas davantage de conséquences pertinentes qu'avec Γ seul). Ceci constitue une relation de conséquence à base de pertinence. Plus formellement,

Définition 63 Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique et $\mid\!\sim$ une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$.
On dit que $\mid\!\sim$ est une *relation de conséquence à base de pertinence* (alias X-logique) ssi il existe $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ tel que $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}$,

$$\Gamma \mid\!\sim \alpha \text{ ssi } \vdash(\Gamma, \alpha) \cap \mathcal{E} \subseteq \vdash(\Gamma).$$

De plus, si $\vdash(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, on dit que $\mid\!\sim$ est *fermée*.

On introduit maintenant une nouvelle hypothèse sur les structures sémantiques (en fait, simplement une version affaiblie de $(A3)$) :

Définition 64 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\vee$ un connecteur binaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$ et $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique. Alors, définissons l'hypothèse suivante :
$(A4)$ $\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}$, $M_{\alpha \vee \beta} = M_\alpha \cup M_\beta$.

On montrera que sous $(A4)$, les relations de conséquence pivotantes UC sont identiques aux relations de conséquence à base de pertinence fermées. Pour cela, on introduit d'abord la notation 65 et la proposition 66 (très facile à montrer) que l'on utilisera implicitement dans la suite.

Notation 65 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\vee$ un connecteur binaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ et $\Delta \subseteq \mathcal{F}$. Alors :
$\Gamma \vee \Delta := \{\alpha \vee \beta : \alpha \in \Gamma \text{ et } \beta \in \Delta\}$.

Proposition 66 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\vee$ un connecteur binaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A4)$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ et $\Delta \subseteq \mathcal{F}$.
Alors, $M_\Gamma \cup M_\Delta = M_{\Gamma \vee \Delta}$.

Preuve Direction : "$\subseteq$".
Supposons le contraire, i.e. $\exists\, v \in M_\Gamma \cup M_\Delta$, $v \notin M_{\Gamma\vee\Delta}$.
Alors, $\exists\, \alpha \in \Gamma$, $\exists\, \beta \in \Delta$, $v \notin M_{\alpha\vee\beta}$.
Or, par $(A4)$, $v \in M_\Gamma \cup M_\Delta \subseteq M_\alpha \cup M_\beta = M_{\alpha\vee\beta}$, ce qui est impossible.
Direction : "$\supseteq$".
Supposons le contraire, i.e. $\exists\, v \in M_{\Gamma\vee\Delta}$, $v \notin M_\Gamma \cup M_\Delta$.
Alors, $\exists\, \alpha \in \Gamma$, $v \notin M_\alpha$ et $\exists\, \beta \in \Delta$, $v \notin M_\beta$.
Ainsi, par $(A4)$, on a que $v \notin M_\alpha \cup M_\beta = M_{\alpha\vee\beta}$.
Cependant, $\alpha \vee \beta \in \Gamma \vee \Delta$. Donc, $v \notin M_{\Gamma\vee\Delta}$, ce qui est impossible. ∎

Proposition 67 Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage, $\vee$ un connecteur binaire de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$ et $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, \models)$ une structure sémantique satisfaisant $(A4)$.
Alors, les relations de conséquence pivotantes UC sont identiques aux relations de conséquence à base de pertinence fermées.

Preuve Direction : "$\subseteq$".
Soit $\mid\!\sim$ une relation de conséquence pivotante UC.
Alors, il existe une fonction de sélection UC FC μ de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que :
$\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma))$.
Donc, par la proposition 22, il existe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{V} \setminus \mathcal{I} \in \mathbf{D}$ et $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(M_\Gamma \cap \mathcal{I})$.
Définissons : $\mathcal{E} := T(\mathcal{V} \setminus \mathcal{I})$.
Alors, $\vdash(\mathcal{E}) = T(M_\mathcal{E}) = T(M_{T(\mathcal{V}\setminus\mathcal{I})}) = T(\mathcal{V} \setminus \mathcal{I}) = \mathcal{E}$.
De plus, comme $\mathcal{V} \setminus \mathcal{I} \in \mathbf{D}$, on a que $M_\mathcal{E} = M_{T(\mathcal{V}\setminus\mathcal{I})} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{I}$.
On montre que :
(0) $\quad \forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}, \Gamma \mid\!\sim \alpha$ ssi $\vdash(\Gamma, \alpha) \cap \mathcal{E} \subseteq \vdash(\Gamma)$.
En conséquence, $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence à base de pertinence fermée.
Direction : "$\supseteq$".
Soit $\mid\!\sim$ une relation de conséquence à base de pertinence fermée.
Alors, il existe $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{E} = \vdash(\mathcal{E})$ et $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}, \forall\, \alpha \in \mathcal{F}, \Gamma \mid\!\sim \alpha$ ssi $\vdash(\Gamma, \alpha) \cap \mathcal{E} \subseteq \vdash(\Gamma)$.
Définissons : $\mathcal{I} := \mathcal{V} \setminus M_\mathcal{E}$.
Alors, $\mathcal{V} \setminus \mathcal{I} = M_\mathcal{E} \in \mathbf{D}$.
On montrera que :
(1) $\quad \forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(M_\Gamma \cap \mathcal{I})$.
Soit μ la fonction de sélection de $\mathbf{D}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ telle que $\forall\, V \in \mathbf{D}$, $\mu(V) = V \cap \mathcal{I}$.
Alors, $\forall\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\mid\!\sim(\Gamma) = T(\mu(M_\Gamma))$.
De plus, par la proposition 22, μ est une fonction de sélection UC et FC.
En conséquence, $\mid\!\sim$ est une relation de conséquence pivotante UC.

Preuve de (0). Soient $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ et $\alpha \in \mathcal{F}$. Alors :
$\Gamma \mid\!\sim \alpha$ ssi
$M_\Gamma \cap \mathcal{I} \subseteq M_\alpha$ ssi
$M_\Gamma \subseteq M_\alpha \cup (\mathcal{V} \setminus \mathcal{I})$ ssi
$M_\Gamma \subseteq M_\alpha \cup M_\mathcal{E}$ ssi
$M_\Gamma \subseteq M_{\Gamma\cup\{\alpha\}} \cup M_\mathcal{E}$ ssi
$M_\Gamma \subseteq M_{(\Gamma\cup\{\alpha\})\vee\mathcal{E}}$ ssi
$T(M_{(\Gamma\cup\{\alpha\})\vee\mathcal{E}}) \subseteq T(M_\Gamma)$ ssi

$T(M_{\Gamma\cup\{\alpha\}} \cup M_{\mathcal{E}}) \subseteq T(M_\Gamma)$ ssi
$T(M_{\Gamma\cup\{\alpha\}}) \cap T(M_{\mathcal{E}}) \subseteq T(M_\Gamma)$ ssi
$\vdash(\Gamma, \alpha) \cap \vdash(\mathcal{E}) \subseteq \vdash(\Gamma)$ ssi
$\vdash(\Gamma, \alpha) \cap \mathcal{E} \subseteq \vdash(\Gamma)$.

Preuve de (1). Soient $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ et $\alpha \in \mathcal{F}$. Alors :
$\Gamma \mid\!\sim \alpha$ ssi
$\vdash(\Gamma, \alpha) \cap \mathcal{E} \subseteq \vdash(\Gamma)$ ssi
$\vdash(\Gamma, \alpha) \cap \vdash(\mathcal{E}) \subseteq \vdash(\Gamma)$ ssi
$T(M_{\Gamma\cup\{\alpha\}}) \cap T(M_{\mathcal{E}}) \subseteq T(M_\Gamma)$ ssi
$T(M_{\Gamma\cup\{\alpha\}} \cup M_{\mathcal{E}}) \subseteq T(M_\Gamma)$ ssi
$T(M_{(\Gamma\cup\{\alpha\})\vee\mathcal{E})}) \subseteq T(M_\Gamma)$ ssi
$M_\Gamma \subseteq M_{(\Gamma\cup\{\alpha\})\vee\mathcal{E})}$ ssi
$M_\Gamma \subseteq M_{\Gamma\cup\{\alpha\}} \cup M_{\mathcal{E}}$ ssi
$M_\Gamma \subseteq M_\alpha \cup M_{\mathcal{E}}$ ssi
$M_\Gamma \cap (\mathcal{V} \setminus M_{\mathcal{E}}) \subseteq M_\alpha$ ssi
$M_\Gamma \cap \mathcal{I} \subseteq M_\alpha$. ∎

Deuxième partie

Manque de Caractérisations Finies pour la Révision à base de Distances

Chapitre 7

L'approche AGM

7.1 Opérateurs basiques

La révision des croyances se pose la question de savoir comment un agent intelligent peut remplacer son état épistémique courant par un autre qui est non-trivial et prend en compte une nouvelle information. Dans, [AGM85], Alchourrón, Gärdenfors et Makinson ont proposé une approche bien connue maintenant sous le nom d'AGM. On la présentera dans un cadre classique très simple.

Supposons que $\mathcal{L}$ est un langage propositionnel classique contenant les connecteurs usuels $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$, $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$, $\vdash$ est la relation de conséquence classique sur $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ et $\mathbf{T}$ est l'ensemble de tous les $K \subseteq \mathcal{F}$ tels que K est $\vdash$-fermé (c'est à dire que $K = \{\alpha \in \mathcal{F} : K \vdash \alpha\}$). Intuitivement, chaque élément de $\mathbf{T}$ représente un état épistémique et chaque élément de $\mathcal{F}$ une nouvelle information. Trois opérations fondamentales ont été introduites : l'*expansion*, la *contraction* et la *revision*.

Un opérateur d'expansion $+$ est une fonction de $\mathbf{T} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$. Intuitivement, $K + \alpha$ est le résultat obtenu après avoir ajouté α à K sans vérifier la non-trivialité de $K + \alpha$. Alchourrón *et al.* ont proposé les postulats de rationalité suivants pour les opérateurs d'expansion : $\forall\, K, K' \in \mathbf{T}$, $\forall\, \alpha \in \mathcal{F}$,

$(K{+}1)$ $K + \alpha \in \mathbf{T}$;

$(K{+}2)$ $\alpha \in K + \alpha$;

$(K{+}3)$ $K \subseteq K + \alpha$;

$(K{+}4)$ si $\alpha \in K$, alors $K + \alpha = K$;

$(K{+}5)$ si $K \subseteq K'$, alors $K + \alpha \subseteq K' + \alpha$;

$(K{+}6)$ si $+'$ est un opérateur d'expansion satisfaisant $(K{+}1)$–$(K{+}5)$, alors $K + \alpha \subseteq K +' \alpha$.

Les justifications intuitives de $(K{+}1)$–$(K{+}4)$ sont évidentes. $(K{+}5)$ assure la monotonie. $(K{+}6)$ assure que l'ajout d'information est minimal. En fait, ces postulats sont très contraignants. En effet, le seul opérateur qui les satisfait est celui tel que $K + \alpha$ est la $\vdash$-fermeture de $K \cup \alpha$. Ainsi, à partir de maintenant, $+$ dénotera cet opérateur.

Un opérateur de contraction $\div$ est une fonction de $\mathbf{T} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$. Intuitivement, $K \div \alpha$ est le résultat obtenu après avoir retiré α de K. Les postulats suivants ont été proposés : $\forall\, K \in \mathbf{T}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}$,

$(K{\div}1)$ $K \div \alpha \in \mathbf{T}$;

$(K\div 2)$ $K \div \alpha \subseteq K$;

$(K\div 3)$ si $\alpha \notin K$, alors $K \div \alpha = K$;

$(K\div 4)$ si $\nvdash \alpha$, alors $\alpha \notin K \div \alpha$;

$(K\div 5)$ si $\alpha \in K$, alors $K \subseteq (K \div \alpha) + \alpha$;

$(K\div 6)$ si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, alors $K \div \alpha = K \div \beta$;

$(K\div 7)$ $(K \div \alpha) \cap (K \div \beta) \subseteq K \div (\alpha \wedge \beta)$;

$(K\div 8)$ si $\alpha \notin K \div (\alpha \wedge \beta)$, alors $K \div (\alpha \wedge \beta) \subseteq K \div \alpha$.

Les justifications intuitives de $(K\div 1)$–$(K\div 4)$ sont évidentes. $(K\div 5)$ a été beaucoup critiqué dans e.g. [Han91, Fuh91, Nie91, LR91] et est aussi connu sous le nom de “Principle of Recovery”. $(K\div 6)$ rend la contraction indépendante de la forme syntaxique des formules. $(K\div 7)$ et $(K\div 8)$ imposent des restrictions naturelles sur la contraction par une conjonction.

Enfin, un opérateur de révision $\star$ est une fonction de $\mathbf{T} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$. Intuitivement, $K \star \alpha$ est le résultat obtenu après avoir ajouté α à K tout en préservant la non-trivialité de $K \star \alpha$. Les postulats AGM bien connus sont les suivants : $\forall\, K \in \mathbf{T}, \forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}$

$(K\star 1)$ $K \star \alpha \in \mathbf{T}$;

$(K\star 2)$ $\alpha \in K \star \alpha$;

$(K\star 3)$ $K \star \alpha \subseteq K + \alpha$;

$(K\star 4)$ si $\neg\alpha \notin K$, alors $K + \alpha \subseteq K \star \alpha$;

$(K\star 5)$ $K \star \alpha = \mathcal{F}$ ssi $\vdash \neg\alpha$;

$(K\star 6)$ si $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, alors $K \star \alpha = K \star \beta$;

$(K\star 7)$ $K \star (\alpha \wedge \beta) \subseteq (K \star \alpha) + \beta$;

$(K\star 8)$ si $\neg\beta \notin K \star \alpha$, alors $(K \star \alpha) + \beta \subseteq K \star (\alpha \wedge \beta)$.

Les motivations sont évidentes pour $(K\star 1)$–$(K\star 4)$. Concernant $(K\star 5)$, il assure que l’ensemble révisé de formules est non-trivial. $(K\star 6)$ rend la révision indépendante de la forme syntaxique des formules. $(K\star 7)$ et $(K\star 8)$ font que la perte d’information est minimale. Katsuno et Mendelzon ont reformulé ces postulats dans un cadre où $\mathcal{L}$ est un langage propositionnel fini (voir [KM91] pour les détails).

On peut définir naturellement la révision à partir de la contraction et vice versa (voir e.g. [G88]). En effet, supposons que $\div$ est un opérateur de contraction satisfaisant $(K\div 1)$–$(K\div 4)$ et $(K\div 6)$ (pas forcément le controversé $(K\div 5)$). Alors, l’opérateur de révision $\star$ défini par l’*identité de Levi* :

$$K \star \alpha = (K \div \neg\alpha) + \alpha$$

satisfait $(K\star 1)$–$(K\star 6)$. De plus, si $\div$ satisfait $(K\div 7)$ (resp. $(K\div 8)$), alors $\star$ satisfait $(K\star 7)$ (resp. $(K\star 8)$).

Réciproquement, supposons que $\star$ est un opérateur de révision satisfaisant $(K\star 1)$–$(K\star 6)$, alors l’opérateur de contraction $\div$ défini par l’*identité de Harper* :

$$K \div \alpha = K \cap (K \star \neg\alpha)$$

satisfait $(K\div 1)$–$(K\div 6)$. De plus, if $\star$ satisfait $(K\star 7)$ (resp. $(K\star 8)$), alors $\div$ satisfait $(K\div 7)$ (resp. $(K\div 8)$).

7.2 Enracinement épistémique

Plusieurs théorèmes de représentation en relation avec l'approche AGM peuvent être trouvés dans la littérature. On en présente un premier. Supposons qu'on peut décider pour toutes formules α et β, si β est au moins aussi "enracinée épistémiquement" que α. Dans [GM88], ceci est représenté par une *relation d'enracinement épistémique*, i.e. une relation $\preceq$ sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Les postulats suivants ont été proposés pour un K donné : $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}$,

$(EE1)$ si $\alpha \preceq \beta$ et $\beta \preceq \gamma$, alors $\alpha \preceq \gamma$;

$(EE2)$ si $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, alors $\alpha \preceq \beta$;

$(EE3)$ $\alpha \preceq \alpha \wedge \beta$ ou $\beta \preceq \alpha \wedge \beta$;

$(EE4)$ si $K \neq \mathcal{F}$, alors $\alpha \notin K$ ssi $\forall\, \beta \in \mathcal{F}, \alpha \preceq \beta$;

$(EE5)$ si $\forall\, \beta \in \mathcal{F}, \beta \preceq \alpha$, alors $\vdash \alpha$.

Des détails sur les justifications de ces postulats peuvent être trouvés dans [GM88] de même que le théorème de représentation suivant : un opérateur de contraction $\div$ satisfait $(K\div1)$–$(K\div8)$ ssi $\forall\, K \in \mathbf{T}$, il existe une relation d'enracinement épistémique $\preceq$ (satisfaisant $(EE1)$–$(EE5)$ pour K) telle que $\forall\, \alpha \in \mathcal{F}$, $K \div \alpha = \{\beta \in K : \alpha \prec \alpha \vee \beta$ ou $\vdash \alpha\}$.

Des résultats de ce genre mettent en avant l'importance de l'approche AGM. Cependant, une "faiblesse" est qu'il n'y a pas nécessairement de connexion entre les différentes relations d'enracinement épistémique. Cela aurait été meilleur si les contractions des différents K's avaient toutes été définies par le même objet.

7.3 Systèmes de sphères

Dans [Gro88], Grove a fourni une caractérisation importante utilisant des *systèmes de sphères*. Ensuite, Boutilier, Katsuno et Mendelzon l'ont modifié légèrement [Bou94, KM91] en utilisant des "*rankings*" à la place des systèmes de sphères. Présentons cette version modifiée. Supposons que $\mathcal{V}$ est l'ensemble de toutes les interprétations classiques de $\mathcal{L}$, $\alpha \in \mathcal{F}$ et $V \subseteq \mathcal{V}$. Alors, M_α dénote l'ensemble de tous les modèles de α et $T(V)$ l'ensemble de toutes les formules satisfaites dans V. A présent, supposons que $\preceq$ est un ranking sur $\mathcal{V}$, i.e. une relation sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ totale, réflexive et transitive. Intuitivement, $v \preceq w$ signifie : "v est au moins aussi importante que w". Alors, $\preceq$ défini les éléments les plus importants de V de la manière suivante :
$min_{\preceq}(V) := \{v \in V : \forall\, w \in V, w \not\prec v\}$.

Voici le théorème de représentation en question : un opérateur de révision $\star$ satisfait $(K\star1)$–$(K\star8)$ ssi $\forall\, K \in \mathbf{T} \setminus \{\mathcal{F}\}$, il existe un ranking $\preceq$ sur $\mathcal{V}$ tel que $K = T(min_{\preceq}(\mathcal{V}))$ et $\forall\, \alpha \in \mathcal{F}$, $K \star \alpha = T(min_{\preceq}(M_\alpha))$. [1]

Ce théorème constitue un second indicateur de l'importance de l'approche AGM. Cependant, il n'existe pas nécessairement de "colle" entre les différents rankings. Ce n'est pas surprenant car les postulats AGM ne demandent jamais à un opérateur de mettre un peu de cohérence entre les révisions de deux ensembles de formules différents K et K'. En conséquence, certains opérateurs sont acceptés alors qu'ils ne se comportent pas correctement quand ils sont itérés. Pour pallier ce problème, il existe au moins deux sortes (compatibles) de solutions.

[1]On a omit le cas où $K = \mathcal{F}$, lequel doit recevoir un traitement spécial (voir [Bou94, KM91] pour les détails).

Premièrement, on peut représenter un état épistémique avec quelque chose de plus riche que simplement un ensemble de formules, par exemple, un ranking ou une *fonction conditionnelle ordinale* [Spo88]. Approximativement, l'idée est de représenter non seulement les croyances courantes, mais aussi la stratégie de révision, et cela dans le but de les contraindre tous les deux pour obtenir des propriétés de révision itérée. Des approches bien connues de ce genre sont : la *révision naturelle* de Boutilier [Bou93, Bou96] ; l'approche de Freund et Lehmann [FL94] ; l'approche de Darwiche et Pearl [DP94, DP97] ; l'approche révisée de Lehmann [Leh95]. On ne rentrera pas dans les détails. En fait, la partie II est essentiellement liée au second type de solution.

Deuxièmement, on peut imaginer qu'un objet unique définit toutes les révisions des différents K's, ce qui entraînera une grande cohérence entre elles. Ainsi, des propriétés de révision itérée émergeront naturellement (sans nécessairement enrichir la représentation d'un état épistémique). Schlechta a proposé une approche de ce genre basée sur des *mesures* [Sch91, Sch04]. Approximativement, l'idée est d'associer (de manière indépendante) à chaque atome un sous-ensemble mesurable de l'intervalle réel $[0, 1]$, et donc une probabilité. Cette mesure de probabilité peut ensuite être étendue aux formules composées, ce qui donnera un "poids" à chaque formule. Ceci résultera en une relation "pre-EE" (voir la définition 7.4.1 de [Sch91]) qui ne mentionne aucun K en particulier, et qui génère une relation d'enracinement épistémique pour tout K (voir la définition 7.4.2 et la proposition 7.4.2 de [Sch91]). En fin de compte, on obtient ainsi un opérateur de révision qui se comporte raisonnablement en cas d'itération.

Une approche alternative de ce second genre est la révision à base de distances que l'on étudie en détail dans le chapitre 8.

Chapitre 8

Révision à base de distances

Dans ce chapitre on introduit les définitions fondamentales de la partie II.

8.1 Les pseudo-distances

Dans de nombreuses circonstances, un agent peut évaluer pour deux interprétations v et w quelconques, jusqu'où la situation décrite par w est éloignée (ou proche) de la situation décrite par v. De même, l'agent peut évaluer la difficulté pour passer de v à w, ou encore les chances que cette transition a de se produire. Dans [LMS01], cela est représenté par des pseudo-distances :

Définition 68 Soit $\mathcal{V}$ un ensemble.
On dit que $\mathcal{D}$ est une *pseudo-distance* sur $\mathcal{V}$ ssi $\mathcal{D} = (C, \prec, d)$, où C est un ensemble non-vide, $\prec$ est une relation d'ordre stricte et totale sur C et d est une fonction de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ dans C.

Intuitivement, $\mathcal{V}$ est un ensemble d'interprétations. Chaque élément de C représente un "coût". Ensuite, $c \prec c'$ signifie que le coût c est strictement plus petit que le coût c'. Et $d(v, w)$ est le coût pour aller de v à w. Naturellement, des propriétés qui viennent à l'esprit sont celles des distances usuelles. Avant de les présenter, on a besoin des notations suivantes :

Notation 69 Soit $r \in \mathbb{R}$. Alors, $abs(r)$ dénote la valeur absolue de r.
Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Alors, $[n, m]$ dénote l'ensemble de tous les k dans $\mathbb{N}$ (pas dans $\mathbb{R}$) tels que $n \leq k \leq m$.

Définition 70 Soit $\mathcal{D} = (C, \prec, d)$ une pseudo-distance sur un ensemble $\mathcal{V}$.
$\mathcal{D}$ est *symétrique* ssi $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$, $d(v, w) = d(w, v)$.
$\mathcal{D}$ *respecte l'identité* (RI) ssi
(1) $C = \mathbb{R}$;
(2) $\prec$ est la relation d'ordre stricte totale usuelle sur $\mathbb{R}$;
(3) $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$, $d(v, w) = 0$ ssi $v = w$.
$\mathcal{D}$ est *positive* ssi (1), (2) et
(4) $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$, $0 \preceq d(v, w)$.
$\mathcal{D}$ *respecte l'inégalité triangulaire* (RIT) ssi (1), (2) et
(5) $\forall\, v, w, x \in \mathcal{V}$, $d(v, x) \preceq d(v, w) + d(w, x)$.

Ces propriétés n'ont pas été imposées dès le début car des situations naturelles n'auraient alors pas pues être représentées. Par exemple, il se peut que le coût pour se déplacer de v à w soit plus cher que celui pour se déplacer de w à v. Les pseudo-distances non-symétriques seront alors utiles. Il se peut aussi que certaines situations demandent un coût pour rester en place, ce qui rend intéressantes les pseudo-distances non-RI. Un dernier exemple : on peut imaginer des scénarios où certains coûts peuvent être vus comme des "bénéfices", on aura alors besoin des pseudo-distances non-positives.

De plus, on n'impose pas que les coûts soient exactement les nombres réels. Cela a des avantages. En effet, on peut avoir besoin de $|\mathbb{N}|$ pour représenter un "coût infini" utile quand une transition est impossible ou extrêmement difficile. Si on ajoute $|\mathbb{N}|$ aux réels, alors on peut définir naturellement des versions "libérales" du respect de l'identité, de la positivité et du respect de l'inégalité triangulaire :

Définition 71 Soit $\mathcal{D} = (C, \prec, d)$ une pseudo-distance sur un ensemble $\mathcal{V}$.
$\mathcal{D}$ est *libéralement* RI ssi
(1) $C = \mathbb{R} \cup \{|\mathbb{N}|\}$;
(2) $\forall\, c, c' \in C$, $c \prec c'$ ssi $(c, c' \in \mathbb{R}$ et $c < c')$ ou $(c \in \mathbb{R}$ et $c' = |\mathbb{N}|)$;
(3) $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$, $d(v, w) = 0$ ssi $v = w$.
$\mathcal{D}$ est *libéralement positive* ssi (1), (2) et
(4) $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$, $0 \preceq d(v, w)$.
$\mathcal{D}$ est *libéralement* RIT ssi (1), (2) et
(5) $\forall\, v, w, x \in \mathcal{V}$: si $d(v, x), d(v, w), d(w, x) \in \mathbb{R}$, alors $d(v, x) \preceq d(v, w) + d(w, x)$;
si $d(v, x) = |\mathbb{N}|$, alors $d(v, w) = |\mathbb{N}|$ ou $d(w, x) = |\mathbb{N}|$.

La distance de Hamming a été étudiée par de nombreux chercheurs dont e.g. Dalal [Dal88]. Le respect de cette distance est une propriété importante. On a d'abord besoin de présenter les matrices d'un langage propositionnel [Urq01] :

Définition 72 Soient $\mathcal{L} = (\mathcal{A}, \mathcal{C})$ un langage propositionnel ($\mathcal{A}$ dénote les atomes et $\mathcal{C}$ les connecteurs), $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fbfs de $\mathcal{L}$ et $\forall \diamond \in \mathcal{C}$, soit $n(\diamond)$ l'arité de $\diamond$.
On dit que $\mathcal{M}$ est une *matrice* sur $\mathcal{L}$ ssi $\mathcal{M} = (T, D, f)$, où T est un ensemble, D est un sous-ensemble strict et non-vide de T et f est une fonction (dont le domaine est $\mathcal{C}$) telle que $\forall \diamond \in \mathcal{C}$, $f_\diamond$ (i.e. $f(\diamond)$) est une fonction de $T^{n(\diamond)}$ dans T.
On dit que v est une $\mathcal{M}$*-interprétation* ssi v est une fonction de $\mathcal{F}$ dans T telle que :
$\forall \diamond \in \mathcal{C}, \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n(\diamond)} \in \mathcal{F}$, on a $v(\diamond(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n(\diamond)})) = f_\diamond(v(\alpha_1), \ldots, v(\alpha_{n(\diamond)}))$.

Intuitivement, T est un ensemble de valeurs de vérité et D contient toutes les valeurs désignées.

Définition 73 Soient $\mathcal{L} = (\mathcal{A}, \mathcal{C})$ un langage propositionnel, $\mathcal{M}$ une matrice sur $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}$ l'ensemble de toutes les $\mathcal{M}$-interprétations et $\mathcal{D} = (C, \prec, d)$ une pseudo-distance sur $\mathcal{V}$.
On utilisera la notation suivante : $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$, $h(v, w) := \{p \in \mathcal{A} : v(p) \neq w(p)\}$.
On dit que $\mathcal{D}$ *respecte l'inégalité de Hamming* (RIH) ssi $\forall\, v, w, x \in \mathcal{V}$,

$$\text{si } |h(v, w)| < |h(v, x)|, \text{ alors } d(v, w) \prec d(v, x).$$

Rappelons que $h(v, w)$ peut être infini et donc que $<$ doit être vue comme la relation d'ordre usuelle sur les nombres cardinaux. On se penche à présent sur des opérateurs cruciaux introduits dans

[LMS01]. Ils sont centraux dans la définition de la révision à base de distances. Ils transforment tous ensembles d'interprétations V et W en l'ensemble de tous les éléments w de W tels qu'un déplacement global de V vers w est de coût minimal. Notons que sur ce point, [LMS01] prend ses racines dans [KM92] et surtout dans [Lew73].

Définition 74 Soit $\mathcal{D} = (C, \prec, d)$ une pseudo-distance sur un ensemble $\mathcal{V}$.
On dénote par $|_\mathcal{D}$ l'opérateur binaire sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ tel que $\forall\, V, W \subseteq \mathcal{V}$,

$$V|_\mathcal{D}W = \{w \in W : \exists\, v \in V, \forall\, v' \in V, \forall\, w' \in W, d(v, w) \preceq d(v', w')\}.$$

8.2 Opérateurs de révision basés sur une distance

Les choix ontologiques adoptés dans [LMS01] sont proches de ceux de l'approche AGM : un langage propositionnel classique est considéré et un état épistémique ainsi qu'une nouvelle information sont tous deux représentés par une ensemble consistants de formules (pas nécessairement clos sous la déduction classique).

Notation 75 On note $\mathcal{L}_c$ un langage propositionnel classique et $\vdash_c$, $\mathcal{V}_c$, $\models_c$ et $\mathcal{F}_c$ respectivement la relation de conséquence, les interprétations, la relation de satisfaction et les fbfs (tous classiques) de $\mathcal{L}_c$. Soient $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}_c$ et $V \subseteq \mathcal{V}_c$, alors :
$\Gamma \vee \Delta := \{\alpha \vee \beta : \alpha \in \Gamma, \beta \in \Delta\}$;
$\vdash_c(\Gamma) := \{\alpha \in \mathcal{F}_c : \Gamma \vdash_c \alpha\}$;
$M_\Gamma := \{v \in \mathcal{V}_c : \forall\, \alpha \in \Gamma, v \models_c \alpha\}$;
$T(V) := \{\alpha \in \mathcal{F}_c : V \subseteq M_\alpha\}$;
$\mathbf{C} := \{\Gamma \subseteq \mathcal{F}_c : \vdash_c(\Gamma) \neq \mathcal{F}_c\}$;
$\mathbf{D} := \{V \subseteq \mathcal{V}_c : \exists\, \Gamma \subseteq \mathcal{F}_c, V = M_\Gamma\}$.

Remarque 76 Certaines notations de la partie II "écrasent" celles de la partie I (de nouvelles notations auraient été trop encombrantes).

Dans ce cadre classique, deux nouvelles propriétés pour les pseudo-distances peuvent être définies. Chacune véhicule un sens clair. Leur importance a été mise en évidence dans [LMS01].

Définition 77 Soit $\mathcal{D} = (C, \prec, d)$ une pseudo-distance sur $\mathcal{V}_c$.
$\mathcal{D}$ préserve la définissabilité (PrD) ssi $\forall\, V, W \in \mathbf{D}$, $V|_\mathcal{D}W \in \mathbf{D}$.
$\mathcal{D}$ préserve la cohérence (PrC) ssi $\forall\, V, W \in \mathcal{P}(\mathcal{V}_c) \setminus \{\emptyset\}$, $V|_\mathcal{D}W \neq \emptyset$.

A présent, supposons qu'on dispose d'une pseudo-distance $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{V}_c$. Alors, la révision d'un ensemble de formules Γ par un second Δ peut être définie naturellement comme l'ensemble de toutes les formules satisfaites dans $M_\Gamma|_\mathcal{D}M_\Delta$ (i.e. l'ensemble de tous les modèles de Δ les plus proches des modèles de Γ).

Définition 78 Soit $\star$ un opérateur de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F}_c)$.
On dit que $\star$ est un *opérateur de révision basé sur une distance* ssi il existe une pseudo-distance $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{V}_c$ telle que $\forall\, \Gamma, \Delta \in \mathbf{C}$,

$$\Gamma \star \Delta = T(M_\Gamma|_\mathcal{D}M_\Delta).$$

De plus, si $\mathcal{D}$ est symétrique, RIH, PrD etc., alors $\star$ l'est aussi.

Les auteurs de [LMS01] reformulé les postulats AGM de la manière qui suit.
Soit $\star$ un opérateur de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F}_c)$ et $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta' \in \mathbf{C}$. Alors, définissons :

($\star$0) si $\vdash_c(\Gamma) = \vdash_c(\Gamma')$ et $\vdash_c(\Delta) = \vdash_c(\Delta')$, alors $\Gamma \star \Delta = \Gamma' \star \Delta'$;

($\star$1) $\Gamma \star \Delta \in \mathbf{C}$ et $\Gamma \star \Delta = \vdash_c(\Gamma \star \Delta)$;

($\star$2) $\Delta \subseteq \Gamma \star \Delta$;

($\star$3) si $\Gamma \cup \Delta \in \mathbf{C}$, alors $\Gamma \star \Delta = \vdash_c(\Gamma \cup \Delta)$;

($\star$4) si $(\Gamma \star \Delta) \cup \Delta' \in \mathbf{C}$, alors $\Gamma \star (\Delta \cup \Delta') = \vdash_c((\Gamma \star \Delta) \cup \Delta')$.

On peut alors vérifier que tout opérateur de révision basé sur une distance RI, PrC et PrD $\star$ satisfait ($\star$0)-($\star$4), i.e.les postulats AGM. Mais, plus important, $\star$ satisfait aussi certaines propriétés de révision itérée. Ce n'est pas surprenant car les révisions des différents Γ's sont toutes définies par une pseudo-distance unique, ce qui assure une grande cohérence entre elles. Par exemple, $\star$ satisfait les deux propriétés suivantes : $\forall\, \Gamma, \Delta, \{\alpha\}, \{\beta\} \in \mathbf{C}$,

- si $\gamma \in (\Gamma \star \{\alpha\}) \star \Delta$ et $\gamma \in (\Gamma \star \{\beta\}) \star \Delta$, alors $\gamma \in (\Gamma \star \{\alpha \vee \beta\}) \star \Delta$;
- si $\gamma \in (\Gamma \star \{\alpha \vee \beta\}) \star \Delta$, alors $\gamma \in (\Gamma \star \{\alpha\}) \star \Delta$ ou $\gamma \in (\Gamma \star \{\beta\}) \star \Delta$.

Ces propriétés ne sont pas entraînées par les postulats AGM, un contre-exemple peut être trouvé dans [LMS01]. Pourtant, elles sont intuitivement justifiées. En effet, prenons trois séquences de révision qui ne diffèrent qu'à une certaine étape i où la nouvelle information est α dans la première séquence, β dans la seconde et $\alpha \vee \beta$ dans la troisième. A présent, supposons que γ est conclue après la première et la seconde séquence. Alors, γ doit naturellement être aussi conclue après la troisième séquence.

Des arguments similaires peuvent être donnés pour la seconde propriété. Maintenant, pour caractériser la révision à base de distance il en faut plus. On discute de cela en détail dans la section 8.3.

8.3 Caractérisations avec des conditions arbitrairement grandes

Les auteurs de [LMS01] ont fourni des caractérisations d'opérateurs de révision basés sur une distance. Ils ont procédé en deux étapes. D'abord, ils ont défini les opérateurs de distance, dans un cadre très général :

Définition 79 Soient $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$ et $|$ un opérateur de $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ dans $\mathbf{X}$.
On dit que $|$ est un *opérateur de distance* ssi il existe une pseudo-distance $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{V}$ telle que
$\forall\, V \in \mathbf{V}, \forall\, W \in \mathbf{W}, V|W = V|_{\mathcal{D}}W$.
De plus, si $\mathcal{D}$ est symétrique, RIH, PrD, etc., alors $|$ l'est aussi.

Ensuite, ils ont caractérisé des familles d'opérateurs de distance (avec le moins possible d'hypothèses sur $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ et $\mathbf{X}$). En fait, c'est là l'essence de leur travail. Voici un exemple :

Proposition 80 [LMS01] Soient $\mathcal{V}$ un ensemble non-vide, $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V})$ et $|$ un opérateur de $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ dans $\mathbf{V}$. Supposons que $\emptyset \notin \mathbf{V}$ et que $\forall\, V, W \in \mathbf{V}$, on a $V \cup W \in \mathbf{V}$ et si $V \cap W \neq \emptyset$, alors on a aussi $V \cap W \in \mathbf{V}$.
Alors, $|$ est un opérateur de distance symétrique ssi $\forall\, k \in \mathbb{N}^+, \forall\, V_0, V_1, \ldots, V_k \in \mathbf{V}$, on a
$V_0|V_1 \subseteq V_1$ et

$$(|loop)\ \text{si} \begin{cases} (V_1|(V_0 \cup V_2)) \cap V_0 \neq \emptyset, \\ (V_2|(V_1 \cup V_3)) \cap V_1 \neq \emptyset, \\ \ldots, \\ (V_k|(V_{k-1} \cup V_0)) \cap V_{k-1} \neq \emptyset, \end{cases} \quad \text{alors } (V_0|(V_k \cup V_1)) \cap V_1 \neq \emptyset.$$

Dans une seconde étape seulement, ils ont appliqué ces résultats pour caractériser des familles d'opérateurs de révision basés sur une distance. Par exemple, ils ont appliqué la proposition 80 pour obtenir la proposition 81 ci-dessous. Notons qu'ils ont choisi un cadre classique pour définir la révision à base de distance. Mais, si on choisit maintenant un nouveau cadre, il y a de bonnes chances pour que la proposition 80 puisse toujours être appliquée, grâce à sa nature algébrique.

Proposition 81 [LMS01] Soit $\star$ un opérateur de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F}_c)$.
Alors, $\star$ est un opérateur de révision basé sur une distance symétrique, PrC et PrD ssi $\star$ satisfait $(\star 0)$, $(\star 1)$, $(\star 2)$ et
$\forall\, k \in \mathbb{N}^+, \forall\, \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \in \mathbf{C}$,

$$(\star loop) \ \text{si} \begin{cases} \Gamma_0 \cup (\Gamma_1 \star (\Gamma_0 \vee \Gamma_2)) \in \mathbf{C}, \\ \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \star (\Gamma_1 \vee \Gamma_3)) \in \mathbf{C}, \\ \ldots, \\ \Gamma_{k-1} \cup (\Gamma_k \star (\Gamma_{k-1} \vee \Gamma_0)) \in \mathbf{C}, \end{cases} \quad \text{alors } \Gamma_1 \cup (\Gamma_0 \star (\Gamma_k \vee \Gamma_1)) \in \mathbf{C}.$$

Chapitre 9

Inexistence de caractérisations normales

9.1 Définition

Soient $\mathcal{V}$ un ensemble, $\mathcal{O}$ un ensemble d'opérateurs binaires sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ et $\mid$ un opérateur binaire sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Approximativement, une caractérisation de $\mathcal{O}$ est dite "S-normale" (i.e. appelée normale dans [Sch04]) ssi elle ne contient que des conditions quantifiées universellement, "appliquant" $\mid$ un nombre fini de fois et utilisant seulement des opérations élémentaires (comme e.g. $\cup$, $\cap$, $\setminus$), voir la section 1.6.2.1 de [Sch04] pour les détails. Voici un exemple d'une telle condition :

$(C1)\ \ \forall\, V, W \in \mathbf{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{V}), V|((V \cup W)|W) = \emptyset.$

A présent, on introduit une nouvelle définition, plus générale, de la normalité. On a pour but bien sûr d'obtenir ainsi des résultats d'impossibilité plus généraux. Approximativement, dans cette thèse, une caractérisation de $\mathcal{O}$ est dite normale ssi elle ne contient que des conditions quantifiées universellement et appliquant $\mid$ seulement un nombre fini de fois. Ensuite, les conditions peuvent utiliser des structures ou fonctions complexes, etc., on est pas limité à des opérations élémentaires. Plus formellement :

Définition 82 Soient $\mathcal{V}$ un ensemble et $\mathcal{O}$ un ensemble d'opérateurs binaires sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$.
On dit que $\mathcal{C}$ est une *caractérisation normale* de $\mathcal{O}$ ssi $\mathcal{C} = (n, \Phi)$, où $n \in \mathbb{N}^+$ et Φ est une relation de $\mathcal{P}(\mathcal{V})^{3n}$ telle que pour tout opérateur binaire $\mid$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$,

$$| \in \mathcal{O} \text{ ssi } \forall\, V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n \subseteq \mathcal{V}, (V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n, V_1|W_1, \ldots, V_n|W_n) \in \Phi.$$

Remarque 83 Une notion de caractérisation normale a déjà été introduite dans la définition 60. Bien que les définitions 60 et 82 sont dans le même esprit, elles sont légèrement différentes. En particulier, la première couvre des caractérisations finies et infinies, tandis que la seconde ne couvre que des caractérisations finies. Le lecteur ne devrait pas les confondre car la définition 60 porte sur des relations de conséquence, alors que la définition 82 porte sur des opérateurs binaires.

A présent, supposons qu'il n'y a pas de caractérisations normales de $\mathcal{O}$. Voici des exemples (i.e. $(C1)$, $(C2)$ et $(C3)$ ci-dessous) qui devraient donner au lecteur (on l'espère) une bonne idée des conditions qui ne peuvent pas caractériser $\mathcal{O}$. Cela permettra de mieux cerner les limites des résultats d'impossibilité à venir (les propositions 84 et 85 plus bas).

Pour commencer, $(C1)$ ne peut pas caractériser $\mathcal{O}$. En effet, supposons le contraire, i.e. supposons que $| \in \mathcal{O}$ ssi $\forall\, V, W \in \mathbf{U}$, $V|((V \cup W)|W) = \emptyset$.

Alors, prenons $n = 4$ et Φ tel que $(V_1, \ldots, V_4, W_1, \ldots, W_4, X_1, \ldots, X_4) \in \Phi$ ssi

$$\left\{\begin{array}{l} V_1, V_2 \in \mathbf{U}, \\ V_3 = V_1 \cup V_2, \\ W_3 = V_2, \\ V_4 = V_1, \\ W_4 = X_3, \end{array}\right. \qquad \text{impliquent } X_4 = \emptyset.$$

Alors, $(4, \Phi)$ est une caractérisation normale de $\mathcal{O}$. On donne la preuve rapide de cela, comme ça le lecteur peut vérifier qu'une bonne relation Φ peut être trouvée immédiatement pour toutes les relations simples comme $(C1)$.

Preuve Direction : "$\rightarrow$".
Supposons que $| \in \mathcal{O}$.
Alors, $\forall\, V, W \in \mathbf{U}$, $V|((V \cup W)|W) = \emptyset$.
Soient $V_1, \ldots, V_4, W_1, \ldots, W_4 \subseteq \mathcal{V}$.
On montre que $(V_1, \ldots, V_4, W_1, \ldots, W_4, V_1|W_1, \ldots, V_4|W_4) \in \Phi$.
Supposons que $V_1, V_2 \in \mathbf{U}$, $V_3 = V_1 \cup V_2$, $W_3 = V_2$, $V_4 = V_1$ et $W_4 = V_3|W_3$.
Alors, comme $V_1, V_2 \in \mathbf{U}$, on obtient que $V_1|((V_1 \cup V_2)|V_2) = \emptyset$.
Or, $V_1|((V_1 \cup V_2)|V_2) = V_1|(V_3|W_3) = V_4|W_4$. Ainsi, $V_4|W_4 = \emptyset$.
Direction : "$\leftarrow$".
Supposons que $\forall\, V_1, \ldots, V_4, W_1, \ldots, W_4 \subseteq \mathcal{V}, (V_1, \ldots, V_4, W_1, \ldots, W_4, V_1|W_1, \ldots, V_4|W_4) \in \Phi$.
On montre que $| \in \mathcal{O}$. Soient $V, W \in \mathbf{U}$.
Alors, prenons $V_1 = V$, $V_2 = W$, $V_3 = V_1 \cup V_2$, $W_3 = V_2$, $V_4 = V_1$, $W_4 = V_3|W_3$.
Prenons des valeurs arbitraires pour W_1 et W_2.
Alors, $V_1 \in \mathbf{U}$, $V_2 \in \mathbf{U}$, $V_3 = V_1 \cup V_2$, $W_3 = V_2$, $V_4 = V_1$ et $W_4 = V_3|W_3$.
Or, on a que $(V_1, \ldots, V_4, W_1, \ldots, W_4, V_1|W_1, \ldots, V_4|W_4) \in \Phi$.
Donc, par définition de Φ, on obtient que $V_4|W_4 = \emptyset$.
Mais, $V_4|W_4 = V_1|(V_3|W_3) = V_1|((V_1 \cup V_2)|V_2) = V|((V \cup W)|W)$. ∎

Ainsi, on a exclu toutes les conditions qui sont exclues par l'inexistence d'une caractérisation S-normale de $\mathcal{O}$, i.e. toutes les conditions comme $(C1)$. En fait, des conditions plus complexes sont aussi exclues. Par exemple, supposons que f est une fonction quelconque de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ et considérons la condition suivante :

$(C2)$ $\forall\, V, W \in \mathbf{U}$, $f(V)|((V \cup W)|W) = \emptyset$.

Alors, $(C2)$ ne peut pas caractériser $\mathcal{O}$. En effet, supposons qu'elle caractérise $\mathcal{O}$.
Alors, prenons $n = 4$ et Φ tel que $(V_1, \ldots, V_4, W_1, \ldots, W_4, X_1, \ldots, X_4) \in \Phi$ ssi

$$\left\{\begin{array}{l} V_1, V_2 \in \mathbf{U}, \\ V_3 = V_1 \cup V_2, \\ W_3 = V_2, \\ V_4 = f(V_1), \\ W_4 = X_3, \end{array}\right. \qquad \text{impliquent } X_4 = \emptyset.$$

Alors, de nouveau $(4, \Phi)$ est une caractérisation normale de $\mathcal{O}$. On laisse la preuve facile de cela au lecteur. En revanche, $(C2)$ n'est pas exclue par Schlechta si f ne peut pas être construite à partir d'opérations élémentaires. Mais, même s'il existe une telle construction, montrer que c'est bien le cas pourrait bien être un problème difficile.

On peut même aller plus loin en combinant des quantificateurs universels (pas existentiels) et des fonctions comme f. Par exemple, soit $\mathcal{G}$ un ensemble de fonctions de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$. Considérons la condition suivante :

$(C3)$ $\forall\, f \in \mathcal{G}, \forall\, V, W \in \mathbf{U}$, $f(V)|((V \cup W)|W) = \emptyset$.

Alors, $(C3)$ ne peut pas caractériser $\mathcal{O}$. En effet, supposons que $(C3)$ caractérise $\mathcal{O}$.
Alors, prenons $n = 4$ et Φ tel que $(V_1, \ldots, V_4, W_1, \ldots, W_4, X_1, \ldots, X_4) \in \Phi$ ssi

$$\forall\, f \in \mathcal{G}, \text{ si } \begin{cases} V_1, V_2 \in \mathbf{U}, \\ V_3 = V_1 \cup V_2, \\ W_3 = V_2, \\ V_4 = f(V_1), \\ W_4 = X_3, \end{cases} \quad \text{alors } X_4 = \emptyset.$$

Et bien on peut vérifier que $(4, \Phi)$ est une caractérisation normale de $\mathcal{O}$. La preuve facile de cela est de nouveau laissée au lecteur. En revanche, $(C3)$ n'est pas exclue par Schlechta.

Enfin, un bon exemple de condition qui n'est pas exclue (ni par moi, ni par Schlechta) est bien sûr la condition de boucle arbitrairement grande $(|loop)$ de la section 8.3.

9.2 Résultats d'impossibilité

Etant donné les caractérisations de la section 8.3, une question intéressante est de savoir si on peut remplacer $(\star loop)$ par une condition finie. Clairement, la présence de $(\star loop)$ est dûe à la présence de $(|loop)$. Ainsi, pour résoudre le problème on pourrait attaquer sa source, i.e. essayer de remplacer $(|loop)$ par une condition finie. Mais, dans ce chapitre, on montrera que pour plusieurs familles d'opérateurs de distance, il n'y a pas de caractérisations normales (ces résultats ont été publiés dans [BN06]). La famille symétrique est concernée par cela et donc $(|loop)$ ne peut pas être remplacée par une condition finie et quantifiée universellement.

Maintenant, on peut aller plus loin. En effet, il existe une connexion très forte entre les opérateurs de distance et les opérateurs de révision basés sur une distance. Lehmann *et al.* ont utilisé cette connexion pour obtenir leurs résultats sur les seconds à partir de leurs résultats sur les premiers. Il est raisonnable de penser qu'on peut faire la même chose avec nos résultats négatifs, i.e cette thèse peut probablement être continuée dans le futur pour montrer que plusieurs familles d'opérateurs de révision basés sur une distance n'admettent pas non plus de caractérisations normales. Par exemple, la famille qui est symétrique, PrC et PrD pourrait bien être concernée par ça, ce qui suggère que $(\star loop)$ ne peut pas être remplacée par une condition finie et quantifiée universellement.

On fournit le premier résultat d'impossibilité. Il généralise la proposition 4.2.11 de [Sch04]. Notre preuve est basée sur une légère adaptation d'une pseudo-distance particulière inventée par Schlechta, appelée "Hamster Wheel".

Proposition 84 Soient $\mathcal{V}$ un ensemble infini, $\mathcal{N}$ l'ensemble de tous les opérateurs de distance de $\mathcal{P}(\mathcal{V})^2$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ qui sont symétriques, RI, positifs et RIT, et $\mathcal{O}$ un ensemble d'opérateurs de distance de $\mathcal{P}(\mathcal{V})^2$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ tel que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{O}$.
Alors, il n'existe pas de caractérisation normale de $\mathcal{O}$.

Preuve Supposons le contraire, i.e. il existe $n \in \mathbb{N}^+$ et une relation Φ sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})^{3n}$ tels que :

(0) pour tout opérateur binaire $|$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, on a $| \in \mathcal{O}$ ssi
$\forall\, V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n \subseteq \mathcal{V}$, $(V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n, V_1|W_1, \ldots, V_n|W_n) \in \Phi$.

Comme $\mathcal{V}$ est infini, il existe $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m$ distincts dans $\mathcal{V}$, avec $m = n + 3$.
Soit $X = \{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m\}$.
Soit $\mathcal{D}$ la pseudo-distance sur $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{D} = (\mathbb{R}, <, d)$, où $<$ la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ et d est la fonction définie comme suit. Soient $v, w \in \mathcal{V}$. Considérons les cas qui suivent :
Cas 1 : $v = w$.
Cas 2 : $v \neq w$.
Cas 2.1 : $\{v, w\} \not\subseteq X$.
Cas 2.2 : $\{v, w\} \subseteq X$.
Cas 2.2.1 : $\{v, w\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_m\}$.
Cas 2.2.2 : $\{v, w\} \subseteq \{w_1, \ldots, w_m\}$.
Cas 2.2.3 : $\exists\, i, j \in [1, m],\ \{v, w\} = \{v_i, w_j\}$.
Cas 2.2.3.1 : $i = j$.
Cas 2.2.3.2 : $abs(i - j) \in \{1, m - 1\}$.
Cas 2.2.3.3 : $1 < abs(i - j) < m - 1$.
Alors,

$$d(v, w) = \begin{cases} 0 & \text{si le cas 1 est satisfait ;} \\ 1 & \text{si le cas 2.1 est satisfait ;} \\ 1.1 & \text{si le cas 2.2.1 est satisfait ;} \\ 1.1 & \text{si le cas 2.2.2 est satisfait ;} \\ 1.4 & \text{si le cas 2.2.3.1 est satisfait ;} \\ 2 & \text{si le cas 2.2.3.2 est satisfait ;} \\ 1.2 & \text{si le cas 2.2.3.3 est satisfait.} \end{cases}$$

Notons que $\mathcal{D}$ est essentiellement, mais pas exactement, le Hamster Wheel de [Sch04]. La principale différence est le cas 2.1 qui n'est pas traité par Schlechta. Le lecteur pourra trouver un dessin de $\mathcal{D}$ dans la figure 1.

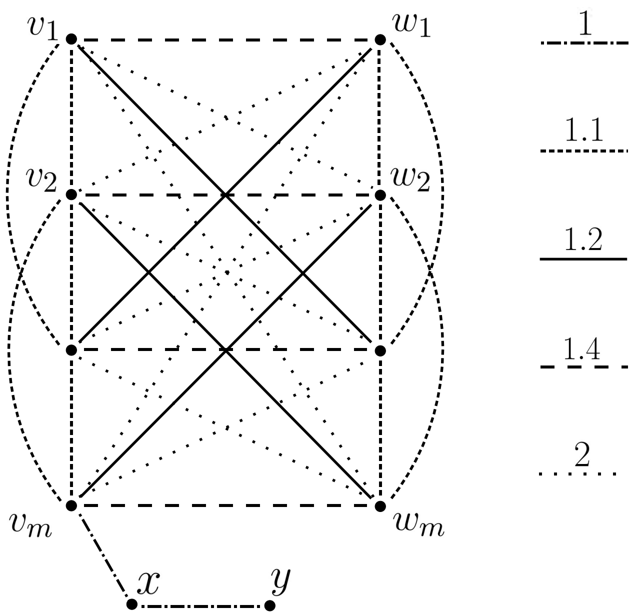

Figure 1 : une adaptation légère du Hamster Wheel.

Soit $|$ l'opérateur binaire sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ tel que $\forall\, V, W \subseteq \mathcal{V}$,

$$V|W = \begin{cases} \{w_m\} & \text{si } V = \{v_m, v_1\} \text{ et } W = \{w_m, w_1\}; \\ \{v_m\} & \text{si } V = \{w_m, w_1\} \text{ et } W = \{v_m, v_1\}; \\ V|_{\mathcal{D}}W & \text{sinon.} \end{cases}$$

La différence entre $|$ et $|_{\mathcal{D}}$ est suffisamment importante pour que :

(1) $|$ n'est pas un opérateur de distance.

On le montrera plus tard. Donc, $| \notin \mathcal{O}$. Donc, par (0), on obtient que :

(2) $\exists\ V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n \subseteq \mathcal{V}$, $(V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n, V_1|W_1, \ldots, V_n|W_n) \notin \Phi$.

De plus, on a pris m suffisamment grand pour que :

(3) $\exists\, r \in [1, m-1], \forall\, i \in [1, n], \{V_i, W_i\} \neq \{\{v_r, v_{r+1}\}, \{w_r, w_{r+1}\}\}$.

De nouveau, on donnera la preuve de cela plus tard, pour une plus grande lisibilité.
Soit $|'$ l'opérateur binaire sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ tel que $\forall\, V, W \subseteq \mathcal{V}$,

$$V|'W = \begin{cases} \{w_{r+1}\} & \text{si } V = \{v_r, v_{r+1}\} \text{ et } W = \{w_r, w_{r+1}\}; \\ \{v_{r+1}\} & \text{si } V = \{w_r, w_{r+1}\} \text{ et } W = \{v_r, v_{r+1}\}; \\ V|W & \text{sinon.} \end{cases}$$

La différence entre $|'$ et $|$ est "invisible" pour Φ.
Plus formellement, par (3), on a que : $\forall\, i \in [1, n]$, $V_i|'W_i = V_i|W_i$.
Ainsi, par (2), on obtient que $(V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n, V_1|'W_1, \ldots, V_n|'W_n) \notin \Phi$.
Donc, par (0), on a que

(4) $|' \notin \mathcal{O}$.

Mais, dans le même temps, il existe une bonne pseudo-distance qui représente $|'$.
En effet, soit $\mathcal{D}'$ la pseudo-distance sur $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{D}' = (\mathbb{R}, <, d')$, où d' est la fonction telle que $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$,

$$d'(v, w) = \begin{cases} 1.3 & \text{si } \exists\, i \in [r+1, m],\ \{v, w\} = \{v_i, w_i\}; \\ d(v, w) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, on montrera que :

(5) $|' = |_{\mathcal{D}'}$.

Maintenant, $\mathcal{D}'$ est clairement symétrique, RI et positive.
De plus, $\mathcal{D}'$ est RIT, parce que $\mathcal{D}'$ est RI et $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$, $d'(v, w) = 0$ ou $1 \leq d'(v, w) \leq 2$.
Ainsi, $|'$ est un opérateur de distance symétrique, RI, positif et RIT.
En conséquence, $|' \in \mathcal{N}$ et donc

(6) $|' \in \mathcal{O}$.

Ainsi, on obtient une contradiction finale par (4) et (6).

Preuve de (1). Supposons le contraire, i.e.
supposons qu'il existe une pseudo-distance $\mathcal{S} = (C, \prec, g)$ sur $\mathcal{V}$ telle que $| = |_{\mathcal{S}}$.
Alors, d'une part :
(1.1) $\quad \forall\, i \in [1, m-1]$, $g(v_i, w_i) = g(v_{i+1}, w_{i+1})$.

Et d'autre part :
(1.2) $\quad g(v_m, w_m) \prec g(v_1, w_1)$.
Mais, par (1.1) et (1.2), on obtient une contradiction évidente.

Preuve de (1.1). Soit $i \in [1, m-1]$.
Alors, $\{v_i, v_{i+1}\}|_{\mathcal{S}}\{w_i, w_{i+1}\} = \{v_i, v_{i+1}\}|_{\mathcal{D}}\{w_i, w_{i+1}\} = \{w_i, w_{i+1}\}$.
Cas 1 : $g(v_i, w_i) \prec g(v_{i+1}, w_{i+1})$.
Comme $\{v_i\}|_{\mathcal{S}}\{w_i, w_{i+1}\} = \{v_i\}|_{\mathcal{D}}\{w_i, w_{i+1}\} = \{w_i\} \not\ni w_{i+1}$, on obtient que :
$g(v_i, w_i) \prec g(v_i, w_{i+1})$.
Donc, $w_{i+1} \notin \{v_i, v_{i+1}\}|_{\mathcal{S}}\{w_i, w_{i+1}\}$, ce qui est impossible.
Cas 2 : $g(v_{i+1}, w_{i+1}) \prec g(v_i, w_i)$.
Comme $\{v_{i+1}\}|_{\mathcal{S}}\{w_i, w_{i+1}\} = \{v_{i+1}\}|_{\mathcal{D}}\{w_i, w_{i+1}\} = \{w_{i+1}\} \not\ni w_i$, on obtient que :
$g(v_{i+1}, w_{i+1}) \prec g(v_{i+1}, w_i)$.
Ainsi, $w_i \notin \{v_i, v_{i+1}\}|_{\mathcal{S}}\{w_i, w_{i+1}\}$, ce qui est impossible.
Cas 3 : $g(v_i, w_i) \not\prec g(v_{i+1}, w_{i+1})$ et $g(v_{i+1}, w_{i+1}) \not\prec g(v_i, w_i)$.
Alors, comme $\prec$ est totale, on a que $g(v_i, w_i) = g(v_{i+1}, w_{i+1})$.

Preuve de (1.2). Comme $\{v_m, v_1\}|_{\mathcal{S}}\{w_m, w_1\} = \{v_m, v_1\}|\{w_m, w_1\} = \{w_m\} \not\ni w_1$, on a que :
$\exists\, v \in \{v_m, v_1\}, \exists\, w \in \{w_m, w_1\}, g(v, w) \prec g(v_1, w_1)$.
Cas 1 : $g(v_m, w_m) \prec g(v_1, w_1)$. Dans ce cas, on a rien à montrer.
Cas 2 : $g(v_m, w_1) \prec g(v_1, w_1)$.
Comme $\{v_m\}|_{\mathcal{S}}\{w_m, w_1\} = \{v_m\}|_{\mathcal{D}}\{w_m, w_1\} = \{w_m\} \not\ni w_1$, on obtient que :
$g(v_m, w_m) \prec g(v_m, w_1)$.
Donc, par transitivité de $\prec$, on a que $g(v_m, w_m) \prec g(v_1, w_1)$.
Cas 3 : $g(v_1, w_m) \prec g(v_1, w_1)$.
Alors, $\{v_1\}|_{\mathcal{S}}\{w_m, w_1\} = \{w_m\}$.
Cependant, $\{v_1\}|_{\mathcal{S}}\{w_m, w_1\} = \{v_1\}|_{\mathcal{D}}\{w_m, w_1\} = \{w_1\}$, ce qui est impossible.
Cas 4 : $g(v_1, w_1) \prec g(v_1, w_1)$. Impossible par irréflexivité de $\prec$.

Preuve de (3). Pour tout $s \in [1, m-1]$, on définit :
$I_s := \{i \in [1, n] : \{V_i, W_i\} = \{\{v_s, v_{s+1}\}, \{w_s, w_{s+1}\}\}\}$.
Supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, i.e. $\forall\, s \in [1, m-1]$, $I_s \neq \emptyset$.
Comme $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m$ sont distincts, on a $\forall\, s, t \in [1, m-1]$, si $s \neq t$, alors $I_s \cap I_t = \emptyset$.
Ainsi, $m - 1 \leq |I_1 \cup \ldots \cup I_{m-1}|$.
D'autre part, $\forall\, s \in [1, m-1]$, $I_s \subseteq [1, n]$. Donc, $|I_1 \cup \ldots \cup I_{m-1}| \leq n$.
Donc, $m - 1 \leq n$, ce qui est impossible car $m = n + 3$.

Preuve de (5). Soient $V, W \subseteq \mathcal{V}$.
Cas 1 : $V = \{v_r, v_{r+1}\}$ et $W = \{w_r, w_{r+1}\}$.
Alors, $V|'W = \{w_{r+1}\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 2 : $V = \{w_r, w_{r+1}\}$ et $W = \{v_r, v_{r+1}\}$.
Alors, $V|'W = \{v_{r+1}\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 3 : $V = \{v_m, v_1\}$ et $W = \{w_m, w_1\}$.
Alors, $V|'W = V|W = \{w_m\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 4 : $V = \{w_m, w_1\}$ et $W = \{v_m, v_1\}$.

Alors, $V|'W = V|W = \{v_m\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5 : $\{V, W\} \notin \{\{\{v_r, v_{r+1}\}, \{w_r, w_{r+1}\}\}, \{\{v_m, v_1\}, \{w_m, w_1\}\}\}$.
Alors, $V|'W = V|W = V|_{\mathcal{D}}W$.
Cas 5.1 : $V = \emptyset$ ou $W = \emptyset$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = \emptyset = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.2 : $V \cap W \neq \emptyset$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = V \cap W = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3 : $V \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$ et $V \cap W = \emptyset$.
Cas 5.3.1 : $V \not\subseteq X$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = W = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3.2 : $V \subseteq X$.
Cas 5.3.2.1 : $W \not\subseteq X$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = W \setminus X = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3.2.2 : $W \subseteq X$.
Cas 5.3.2.2.1 : $V \not\subseteq \{v_1, \ldots, v_m\}$ et $V \not\subseteq \{w_1, \ldots, w_m\}$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = W = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3.2.2.2 : $V \subseteq \{v_1, \ldots, v_m\}$ et $W \not\subseteq \{w_1, \ldots, w_m\}$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = W \cap \{v_1, \ldots, v_m\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3.2.2.3 : $V \subseteq \{v_1, \ldots, v_m\}$ et $W \subseteq \{w_1, \ldots, w_m\}$.
Cas 5.3.2.2.3.1 : $\exists\, v_i \in V, \exists\, w_j \in W, 1 < abs(i-j) < m-1$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = \{w_j \in W : \exists\, v_i \in V, 1 < abs(i-j) < m-1\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3.2.2.3.2 : $\forall\, v_i \in V, \forall\, w_j \in W, abs(i-j) \in \{0, 1, m-1\}$.
Cas 5.3.2.2.3.2.1 : $|V \cup W| \geq 5$.
Comme $m \geq 4$, on obtient que $\exists\, v_i \in V, \exists\, w_j \in W, 1 < abs(i-j) < m-1$, ce qui est impossible.
Cas 5.3.2.2.3.2.2 : $|V \cup W| \in \{2, 3, 4\}$.
Cas 5.3.2.2.3.2.2.1 : $\{k \in [1, m] : v_k \in V$ et $w_k \in W\} = \emptyset$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = W = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3.2.2.3.2.2.2 : $\exists\, i \in [1, m]$, $\{k \in [1, m] : v_k \in V$ et $w_k \in W\} = \{i\}$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = \{w_i\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3.2.2.3.2.2.3 : $\exists\, i, j \in [1, m]$, $i < j$, $\{k \in [1, m] : v_k \in V$ et $w_k \in W\} = \{i, j\}$.
Alors, $V = \{v_i, v_j\}$ et $W = \{w_i, w_j\}$.
Cas 5.3.2.2.3.2.2.3.1 : $r < i$ ou $j \leq r$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = \{w_i, w_j\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3.2.2.3.2.2.3.2 : $i \leq r < j$.
Comme $abs(i-j) \in \{1, m-1\}$, on a que $(V, W) \in \{(\{v_r, v_{r+1}\}, \{w_r, w_{r+1}\}), (\{v_1, v_m\}, \{w_1, w_m\})\}$, ce qui est impossible.
Cas 5.3.2.2.3.2.2.4 : $|\{k \in [1, m] : v_k \in V$ et $w_k \in W\}| \geq 3$.
Alors, $|V \cup W| \geq 6$, ce qui n'est pas possible.
Cas 5.3.2.2.4 : $V \subseteq \{w_1, \ldots, w_m\}$ et $W \not\subseteq \{v_1, \ldots, v_m\}$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = W \cap \{w_1, \ldots, w_m\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 5.3.2.2.5 : $V \subseteq \{w_1, \ldots, w_m\}$ et $W \subseteq \{v_1, \ldots, v_m\}$.
Similaire au cas 5.3.2.2.3. ∎

On étend maintenant les résultats négatifs aux propriétés “libérales” et au respect de Hamming. Notre preuve sera basée sur une nouvelle adaptation du Hamster Wheel. Notons que la distance de Hamming est une distance réaliste qui a été étudiée par de nombreux chercheurs. Cela renforce l'importance de la proposition 85 dans le sens où elle montre que des cas concrets n'admettent pas de caractérisations normales.

Proposition 85 Soient $\mathcal{L} = (\mathcal{A}, \mathcal{C})$ un langage propositionnel avec $\mathcal{A}$ infini et dénombrable, $\mathcal{M}$ une matrice sur $\mathcal{L}$, $\mathcal{V}$ l'ensemble de toutes les $\mathcal{M}$-interprétations, $\mathcal{N}$ l'ensemble de tous les opérateurs de distance de $\mathcal{P}(\mathcal{V})^2$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ qui sont symétriques, RIH, libéralement RI, libéralement positifs et libéralement RIT, et $\mathcal{O}$ un ensemble d'opérateurs de distance de $\mathcal{P}(\mathcal{V})^2$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ tel que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{O}$. Alors, il n'existe pas de caractérisations normales de $\mathcal{O}$.

Preuve Supposons le contraire, i.e. il existe $n \in \mathbb{N}^+$ et une relation Φ sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})^{3n}$ tels que

(0) pour tout opérateur binaire $|$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, on a $| \in \mathcal{O}$ ssi
$\forall\, V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n \subseteq \mathcal{V}$, $(V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n, V_1|W_1, \ldots, V_n|W_n) \in \Phi$.

Comme $\mathcal{A}$ est infini, il existe $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ distincts dans $\mathcal{A}$, avec $m = n + 3$.
Posons $\mathcal{M} = (T, D, f)$.
Comme $D \neq \emptyset$ et $T \setminus D \neq \emptyset$, il existe 0 et 1 distincts dans T.
A présent, $\forall\, i \in [1, m]$, soit v_i la $\mathcal{M}$-interprétation qui associe 1 à p_i et 0 à chaque autre atome de $\mathcal{A}$.
De même, $\forall\, i \in [1, m]$, soit w_i la $\mathcal{M}$-interprétation qui associe 1 à q_i et 0 à tout autre atome de $\mathcal{A}$.
Soit $X = \{v_1, \ldots, v_m, w_1 \ldots, w_m\}$.
Notons que $\forall\, v, w \in X$, avec $v \neq w$, on a que $|h(v, w)| = 2$.
Enfin, soit $\mathcal{D}$ la pseudo-distance sur $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{D} = (\mathbb{R} \cup \{|\mathbb{N}|\}, \prec, d)$, où $\prec$ et d sont définis comme suit. Soient $c, c' \in \mathbb{R} \cup \{|\mathbb{N}|\}$.
Alors, $c \prec c'$ ssi $(c, c' \in \mathbb{R}$ et $c < c')$ ou $(c \in \mathbb{R}$ et $c' = |\mathbb{N}|)$.
Soient $v, w \in \mathcal{V}$. Considérons les cas suivants :
Cas 1 : $v = w$.
Cas 2 : $v \neq w$.
Cas 2.1 : $\{v, w\} \not\subseteq X$.
Cas 2.1.1 : $|h(v, w)| = 1$.
Cas 2.1.2 : $|h(v, w)| \geq 2$.
Cas 2.2 : $\{v, w\} \subseteq X$.
Cas 2.2.1 : $\{v, w\} \subseteq \{v_1, \ldots, v_m\}$.
Cas 2.2.2 : $\{v, w\} \subseteq \{w_1, \ldots, w_m\}$.
Cas 2.2.3 : $\exists\, i, j \in [1, m],\ \{v, w\} = \{v_i, w_j\}$.
Cas 2.2.3.1 : $i = j$.
Cas 2.2.3.2 : $abs(i - j) \in \{1, m - 1\}$.
Cas 2.2.3.3 : $1 < abs(i - j) < m - 1$.
Alors,

$$d(v, w) = \begin{cases} 0 & \text{si le cas 1 est satisfait ;} \\ 1.4 & \text{si le cas 2.1.1 est satisfait ;} \\ |h(v, w)| & \text{si le cas 2.1.2 est satisfait ;} \\ 2.1 & \text{si le cas 2.2.1 est satisfait ;} \\ 2.1 & \text{si le cas 2.2.2 est satisfait ;} \\ 2.4 & \text{si le cas 2.2.3.1 est satisfait ;} \\ 2.5 & \text{si le cas 2.2.3.2 est satisfait ;} \\ 2.2 & \text{si le cas 2.2.3.3 est satisfait.} \end{cases}$$

Notons que $\mathcal{D}$ est une adaptation du Hamster Wheel de [Sch04].

Le lecteur peut trouver un dessin de $\mathcal{D}$ dans la figure 2.

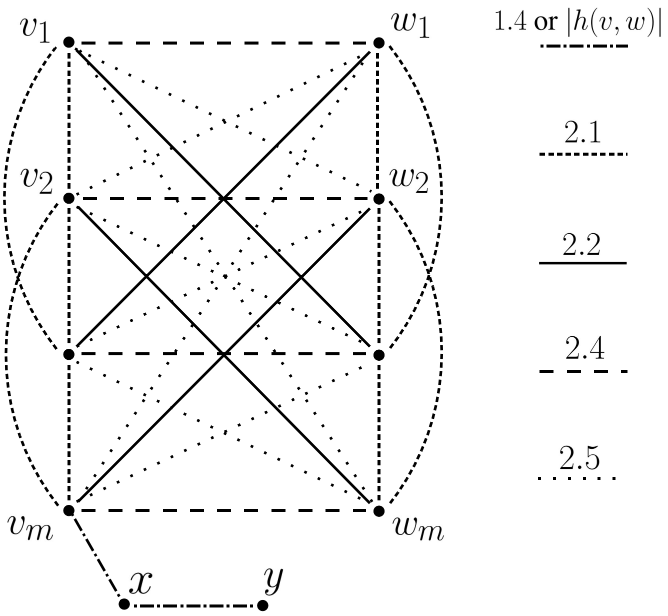

Figure 2 : une adaptation du Hamster Wheel.

Soit $|$ l'opérateur binaire sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ défini comme suit.
Soient $V, W \subseteq \mathcal{V}$ et considérons les cas suivants :
Cas 1 : $\forall v \in V, \forall w \in W, \{v,w\} \subseteq X$ ou $3 \leq |h(v,w)|$.
Cas 1.1 : $V \cap X = \{v_m, v_1\}$ et $W \cap X = \{w_m, w_1\}$.
Cas 1.2 : $V \cap X = \{w_m, w_1\}$ et $W \cap X = \{v_m, v_1\}$.
Cas 1.3 : $\{V \cap X, W \cap X\} \neq \{\{v_m, v_1\}, \{w_m, w_1\}\}$.
Cas 2 : $\exists\, v \in V, \exists\, w \in W, \{v,w\} \not\subseteq X$ et $|h(v,w)| < 3$.
Alors,

$$V|W = \begin{cases} \{w_m\} & \text{si le cas 1.1 est satisfait ;} \\ \{v_m\} & \text{si le cas 1.2 est satisfait ;} \\ V|_{\mathcal{D}}W & \text{si le cas 1.3 ou le cas 2 est satisfait.} \end{cases}$$

La différence entre $|$ et $|_{\mathcal{D}}$ est suffisamment grande pour que $|$ ne soit pas un opérateur de distance.
La preuve de ça est verbatim la même que pour le (1) dans la preuve de la proposition 84.
En conséquence, $| \notin \mathcal{O}$. Donc, par (0), on obtient que

(1) $\exists\ V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n \subseteq \mathcal{V}$, $(V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n, V_1|W_1, \ldots, V_n|W_n) \notin \Phi$.

D'autre part, on a choisi m suffisamment grand pour que :

(2) $\exists\, r \in [1, m-1], \forall\, i \in [1, n]$, $\{V_i \cap X, W_i \cap X\} \neq \{\{v_r, v_{r+1}\}, \{w_r, w_{r+1}\}\}$.

La preuve de ça est la même (verbatim) que pour le (3) dans la preuve de la proposition 84, sauf que V_i et W_i sont remplacés par $V_i \cap X$ et $W_i \cap X$.
Maintenant, soit $|'$ l'opérateur binaire sur $\mathcal{P}(\mathcal{V})$ défini comme suit.
Soient $V, W \subseteq \mathcal{V}$ et considérons les cas suivants :
Cas 1 : $\forall v \in V, \forall w \in W, \{v,w\} \subseteq X$ ou $3 \leq |h(v,w)|$.

Cas 1.1 : $V \cap X = \{v_r, v_{r+1}\}$ et $W \cap X = \{w_r, w_{r+1}\}$.
Cas 1.2 : $V \cap X = \{w_r, w_{r+1}\}$ et $W \cap X = \{v_r, v_{r+1}\}$.
Cas 1.3 : $\{V \cap X, W \cap X\} \neq \{\{v_r, v_{r+1}\}, \{w_r, w_{r+1}\}\}$.
Cas 2 : $\exists\, v \in V, \exists\, w \in W, \{v, w\} \not\subseteq X$ et $|h(v, w)| < 3$.
Alors,

$$V|'W = \begin{cases} \{w_{r+1}\} & \text{si le cas 1.1 est satisfait ;} \\ \{v_{r+1}\} & \text{si le cas 1.2 est satisfait ;} \\ V|W & \text{si le cas 1.3 ou le cas 2 est satisfait.} \end{cases}$$

La différence entre $|'$ et $|$ est “invisible” pour Φ.
Plus formellement, par (2), on a que $\forall\, i \in [1, n]$, $V_i|'W_i = V_i|W_i$.
Ainsi, par (1), on obtient que $(V_1, \ldots, V_n, W_1, \ldots, W_n, V_1|'W_1, \ldots, V_n|'W_n) \notin \Phi$. Donc, par (0) :

(3) $|' \notin \mathcal{O}$.

Seulement, au même moment, il existe une bonne pseudo-distance qui représente $|'$.
En effet, soit $\mathcal{D}'$ la pseudo-distance sur $\mathcal{V}$ telle que $\mathcal{D}' = (\mathbb{R} \cup \{|\mathbb{N}|\}, \prec, d')$, où d' est la fonction telle que $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$,

$$d'(v, w) = \begin{cases} 2.3 & \text{si } \exists\, i \in [r+1, m],\ \{v, w\} = \{v_i, w_i\}; \\ d(v, w) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que $\forall\, v, w \in \mathcal{V}$, $|h(v, w)| \in \mathbb{N}$ ssi $d(v, w) \in \mathbb{R}$ ssi $d'(v, w) \in \mathbb{R}$.
Ainsi, $|h(v, w)| = |\mathbb{N}|$ ssi $d(v, w) = |\mathbb{N}|$ ssi $d'(v, w) = |\mathbb{N}|$.
Notons aussi que $\forall v, w \in \mathcal{V}$, avec $|h(v, w)| \in \mathbb{N}$, $|h(v, w)| \leq d'(v, w) \leq d(v, w) \leq |h(v, w)| + 0.5$.
On montrera que :

(4) $|' = |_{\mathcal{D}'}$.

Mais, $\mathcal{D}'$ est symétrique, libéralement RI et libéralement positive.
De plus, on montrera que :

(5) $\mathcal{D}'$ est RIH ;

(6) $\mathcal{D}'$ est libéralement RIT.

Ainsi, $|'$ est un opérateur de distance symétrique, libéralement RI, libéralement positif, libéralement RIT et enfin RIH.
Ainsi, $|' \in \mathcal{N}$. Donc :

(7) $|' \in \mathcal{O}$.

Enfin, on obtient une contradiction avec (3) et (7), ce qui termine la preuve.

Preuve de (4). Soient $V, W \subseteq \mathcal{V}$.
Cas 1 : $\forall v \in V, \forall w \in W, \{v, w\} \subseteq X$ ou $3 \leq |h(v, w)|$.
Cas 1.1 : $V \cap X = \{v_r, v_{r+1}\}$ et $W \cap X = \{w_r, w_{r+1}\}$.
Alors, $V|'W = \{w_{r+1}\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 1.2 : $V \cap X = \{w_r, w_{r+1}\}$ et $W \cap X = \{v_r, v_{r+1}\}$.
Alors, $V|'W = \{v_{r+1}\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 1.3 : $V \cap X = \{v_m, v_1\}$ et $W \cap X = \{w_m, w_1\}$.
Alors, $V|'W = \{w_m\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 1.4 : $V \cap X = \{w_m, w_1\}$ et $W \cap X = \{v_m, v_1\}$.

Alors, $V|'W = \{v_m\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 1.5 : $\{V \cap X, W \cap X\} \notin \{\{\{v_m, v_1\}, \{w_m, w_1\}\}, \{\{v_r, v_{r+1}\}, \{w_r, w_{r+1}\}\}\}$.
Alors, $V|'W = V|W = V|_{\mathcal{D}}W$.
Cas 1.5.1 : $V \cap W \neq \emptyset$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = V \cap W = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 1.5.2 : $V \cap W = \emptyset$.
Cas 1.5.2.1 : $V \cap X = \emptyset$ ou $W \cap X = \emptyset$.
Alors, $\forall\, v \in V, \forall\, w \in W, d'(v, w) = d(v, w)$. Donc, $V|_{\mathcal{D}}W = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 1.5.2.2 : $V \cap X \neq \emptyset$ et $W \cap X \neq \emptyset$.
Alors, on montrera que :
(4.1) $V|_{\mathcal{D}}W = V \cap X|_{\mathcal{D}}W \cap X$;
(4.2) $V|_{\mathcal{D}'}W = V \cap X|_{\mathcal{D}'}W \cap X$.
Or, on a que $V \cap X|_{\mathcal{D}}W \cap X = V \cap X|_{\mathcal{D}'}W \cap X$.
La preuve de ça est la même (verbatim) que pour le cas 5.3.2.2 du (5), dans la preuve de la proposition 84, sauf que V et W sont remplacés par $V \cap X$ et $W \cap X$.
Cas 2 : $\exists\, v \in V, \exists\, w \in W, (\{v, w\} \not\subseteq X$ et $|h(v, w)| \leq 2)$.
Alors, $V|'W = V|W = V|_{\mathcal{D}}W$.
Cas 2.1. $V \cap W \neq \emptyset$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = V \cap W = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 2.2. $V \cap W = \emptyset$.
Cas 2.2.1. $\exists\, v' \in V, \exists\, w' \in W, |h(v, w)| = 1$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = \{w \in W : \exists\, v \in V, |h(v, w)| = 1\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.
Cas 2.2.2. $\forall\, v' \in V, \forall\, w' \in W, |h(v, w)| \geq 2$.
Alors, $V|_{\mathcal{D}}W = \{w \in W : \exists\, v \in V, \{v, w\} \not\subseteq X$ et $|h(v, w)| = 2\} = V|_{\mathcal{D}'}W$.

Preuve de (4.1). Direction : “$\subseteq$”.
Soit $w \in V|_{\mathcal{D}}W$. Alors, $\exists\, v \in V, \forall\, v' \in V, \forall\, w' \in W, d(v, w) \preceq d(v', w')$.
Cas 1 : $\{v, w\} \subseteq X$.
Alors, $w \in V \cap X|_{\mathcal{D}}W \cap X$.
Cas 2 : $\{v, w\} \not\subseteq X$.
On a que $\exists\, v' \in V \cap X$ et $\exists\, w' \in W \cap X$. De plus, $d(v', w') \in \mathbb{R}$ et $d(v', w') \leq 2.5$.
Cas 2.1 : $|h(v, w)| = |\mathbb{N}|$.
Alors, $d(v, w) = |\mathbb{N}|$. Ainsi, $d(v', w') \prec d(v, w)$, ce qui est impossible.
Cas 2.2 : $|h(v, w)| \in \mathbb{N}$.
Alors, $d(v, w) \in \mathbb{R}$ et $3 \leq |h(v, w)| \leq d(v, w)$. Donc, $d(v', w') < d(v, w)$.
Donc, $d(v', w') \prec d(v, w)$, ce qui est impossible.
Direction : “$\supseteq$”.
Soit $w \in V \cap X|_{\mathcal{D}}W \cap X$.
Alors, $\exists\, v \in V \cap X, \forall\, v' \in V \cap X, \forall\, w' \in W \cap X, d(v, w) \preceq d(v', w')$.
Soient $v' \in V$, $w' \in W$.
Cas 1 : $\{v', w'\} \subseteq X$.
Alors, $d(v, w) \preceq d(v', w')$.
Cas 2 : $\{v', w'\} \not\subseteq X$.
Comme $v, w \in X$, on a que $d(v, w) \in \mathbb{R}$ et $d(v, w) \leq 2.5$.
Cas 2.1 : $|h(v', w')| = |\mathbb{N}|$.

Alors, $d(v', w') = |\mathbb{N}|$, donc $d(v, w) \prec d(v', w')$.
Cas 2.2 : $|h(v', w')| \in \mathbb{N}$.
Alors, $d(v', w') \in \mathbb{R}$ et $3 \leq |h(v', w')| \leq d(v', w')$. Donc, $d(v, w) < d(v', w')$.
Donc, $d(v, w) \prec d(v', w')$.
En conséquence, dans tous les cas on a que $d(v, w) \preceq d(v', w')$. Donc, $w \in V|_{\mathcal{D}}W$.

Preuve de (4.2). Même preuve que pour (4.1), sauf que $|_{\mathcal{D}}$ et d sont remplacés par $|_{\mathcal{D}'}$ et d'.

Preuve de (5). Soient $v, w, x \in \mathcal{V}$ tels que $|h(v, w)| < |h(v, x)|$.
Cas 1 : $|h(v, x)| = |\mathbb{N}|$.
Alors, $|h(v, w)| \in \mathbb{N}$. Donc, $d'(v, w) \in \mathbb{R}$ et $d'(v, x) = |\mathbb{N}|$. Ainsi, $d'(v, w) \prec d'(v, x)$.
Cas 2 : $|h(v, x)| \in \mathbb{N}$.
Alors, $|h(v, w)| \in \mathbb{N}$. Ainsi, $d'(v, x) \in \mathbb{R}$, $d'(v, w) \in \mathbb{R}$ et
$d'(v, w) \leq |h(v, w)| + 0.5 < |h(v, w)| + 1 \leq |h(v, x)| \leq d'(v, x)$. Donc, $d'(v, w) \prec d'(v, x)$.

Preuve de (6). Soient $v, w, x \in \mathcal{V}$.
D'abord, notons que $h(v, x) \subseteq h(v, w) \cup h(w, x)$, donc $|h(v, x)| \leq |h(v, w) \cup h(w, x)|$.
Cas 1 : $d'(v, x) = |\mathbb{N}|$.
Alors, $|h(v, x)| = |\mathbb{N}|$. Maintenant, supposons que $d'(v, w) \in \mathbb{R}$ et $d'(w, x) \in \mathbb{R}$.
Alors, $|h(v, w)|, |h(w, x)| \in \mathbb{N}$. Donc, $|h(v, w) \cup h(w, x)| \in \mathbb{N}$.
Ainsi, $|h(v, x)| \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible.
Donc, $d'(v, w) = |\mathbb{N}|$ ou $d'(w, x) = |\mathbb{N}|$.
Cas 2 : $d'(v, x), d'(v, w), d'(w, x) \in \mathbb{R}$.
Cas 2.1 : $|h(v, w)| = 0$ ou $|h(w, x)| = 0$. Trivial.
Cas 2.2 : $|h(v, w)| \geq 1$ et $|h(w, x)| \geq 1$.
Cas 2.2.1 : $|h(v, w)| \geq 2$ ou $|h(w, x)| \geq 2$.
Cas 2.2.1.1 : $|h(v, x)| \in \{0, 1, 2\}$.
Alors, $d'(v, x) \leq |h(v, x)| + 0.5 \leq 2.5 < 3 \leq |h(v, w)| + |h(w, x)| \leq d'(v, w) + d'(w, x)$.
Cas 2.2.1.2 : $|h(v, x)| \geq 3$.
Alors, $d'(v, x) = |h(v, x)| \leq |h(v, w)| + |h(w, x)| \leq d'(v, w) + d'(w, x)$.
Cas 2.2.2 : $|h(v, w)| = 1$ et $|h(w, x)| = 1$.
Cas 2.2.2.1 : $|h(v, x)| \in \{0, 1, 2\}$.
Alors, $d'(v, x) \leq |h(v, x)| + 0.5 \leq 2.5 < 1.4 + 1.4 = d'(v, w) + d'(w, x)$.
Cas 2.2.2.2 : $|h(v, x)| \geq 3$.
Alors, $|h(v, x)| > |h(v, w)| + |h(w, x)|$, ce qui n'est pas possible. $\blacksquare$

Conclusion

Résumons tout d'abord ce qui a été fait dans la partie I. On a fourni dans un cadre général, des caractérisations pour des relations de conséquence préférentielles(-discriminantes) et pivotantes(-discriminantes). On a montré dans un cadre classique infini que la famille de toutes les relations pivotantes n'admet pas de caractérisations contenant seulement des conditions quantifiées universellement et de taille limitée. Enfin, on a montré que les relations pivotantes univers-codéfinissables sont identiques aux X-logiques pour lesquelles X est déductivement clos. En ce qui concerne la partie II, les contributions sont les suivantes : étendant les résultats de Schlechta, on a montré dans un cadre général que pour plusieurs familles d'opérateurs de distance, il n'existe pas de caractérisations contenant seulement des conditions finies et quantifiées universellement.

A présent, on se tourne vers les perspectives. L'idée générale est de reconduire différentes sortes de raisonnements de sens commun dans des cadres paraconsistants (de la même manière que nous avons reconduit l'étude de logiques préférentielles et pivotantes dans des cadres multi-valués). Un premier candidat de choix est la révision des croyances.

En effet, la plupart des approches à la révision des croyances traitent de manière triviale les ensembles de croyances incohérents (si encore ils sont traités). Pourtant, il est tout à fait rationnel d'avoir des croyances incohérentes. En effet, il peut y avoir des raisons de croire une chose et en même temps des raisons de croire son contraire. Il y a aussi des incohérences en principe impossible à résoudre comme e.g. le "paradoxe de la préface" [Mak65]. Ce dernier dit qu'un auteur consciencieux a des raisons de croire que chaque chose écrite dans son livre est vraie. Mais, à cause de l'imperfection humaine, il croit aussi que son livre contient des erreurs et donc que quelque chose doit être faux. En conséquence, il a dans l'absolu à la fois des raisons de croire que tout est vrai et des raisons de croire que quelque chose est faux. Ainsi, les principes de la révision des croyances doivent marcher aussi sur des ensembles de croyances incohérents. Les approches standards (e.g. AGM) échouent à faire cela car elles sont basées sur la logique classique. Des logiques paraconsistantes (e.g. $\mathcal{FOUR}$) peuvent être la base d'approches plus adéquates.

Un autre avantage de ces approches paraconsistantes est qu'elles ne seront pas forcées à éliminer une contradiction même quand il n'y a pas de bonne manière de le faire. Les contradictions pourront être naturellement tolérées jusqu'à ce qu'une nouvelle information vienne éventuellement justifier un procédé d'élimination plutôt qu'un autre. Enfin, ces approches profiteront d'un champ d'application plus large qui comprendra des systèmes multi-agents où les agents peuvent avoir individuellement des croyances incohérentes.

Plus largement, on peut envisager de reconduire dans des cadres paraconsistants d'autre formes de raisonnement, par exemple : la mise à jour, la fusion, les conditionnels irréels, ou simplement d'autres logiques plausibles.

De nombreux sous-résultats de la partie I peuvent être utiles pour obtenir de nouvelles caractérisations (en particulier, pour de nouvelles logiques plausibles). En effet, dans les cas les plus généraux, c'est à dire où les fonctions de sélection ne préservent pas forcément la définissabilité, on a obtenu des résultats grâce aux lemmes 34 et 35 (pour les relations préférentielles) et aux lemmes 52 et 53 (pour les relations pivotantes). Une chose intéressante et qu'on a utilisé les mêmes lemmes à la fois dans la version simple et dans la version discriminante. Cela suggère qu'ils peuvent être utilisés dans d'autres versions encore.

De plus, quand les fonctions de sélection sous considération préservaient la définissabilité, on a appliqué les lemmes 44 et 45 à la fois dans le cas préférentiel-discriminant et le cas pivotant-discriminant, pour obtenir des caractérisations. Ces lemmes peuvent probablement être appliqués à nouveau pour caractériser d'autres familles de relations de conséquence définies de manière discriminante par des fonctions de sélection préservant la définissabilité (pas forcément cohérentes ou fortement cohérentes comme toutes les familles étudiées ici).

La partie II présente aussi des potentialités. Tout d'abord, rappelons que les résultats négatifs sur les opérateurs de distance peuvent probablement être mis à profit pour montrer des résultats d'impossibilité similaires pour des opérateurs de révision basés sur une distance.

D'autre part, cette direction de recherche future peut toujours être poursuivie si on redéfinit la révision à base de distances dans un cadre non-classique (comme on le suggère dans l'idée générale des perspectives). En effet, comme Lehmann *et al.*, on a travaillé dans un cadre général. Ainsi, si on redéfinit la révision par exemple dans le cadre de la logique $\mathcal{FOUR}$, alors on peut certainement appliquer les résultats de [LMS01] et nos résultats pour montrer respectivement des caractérisations d'opérateurs de révision et montrer qu'elles ne peuvent pas être réellement améliorées.

Enfin, certains opérateurs de mise à jour, comme celui dit de Winslett [Win88] (ou encore celui dit de Forbus), sont basés sur la distance de Hamming. Il serait intéressant de voir si les résultats d'impossibilité de la partie II se répercutent sur ces opérateurs.

Bibliographie

[AA94] O. Arieli and A. Avron. Logical bilattices and inconsistent data. In *Proc. 9th IEEE Annual Symp. on Logic in Computer Science*, pages 468–476. IEEE Press, 1994.

[AA96] O. Arieli and A. Avron. Reasoning with logical bilattices. *Journal of Logic, Language and Information*, 5(1) :25–63, 1996.

[AA98] O. Arieli and A. Avron. The value of the four values. *Artificial Intelligence*, 102 :97–141, 1998.

[AA00] O. Arieli and A. Avron. Bilattices and paraconsistency. In D. Batens, C. Mortensen, G. Priest, and J. Van-Bengedem, editors, *Frontiers in Paraconsistent Logic*, pages 11–28. Research Studies Press, 2000.

[AGM85] C. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *The Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[Aiz85] M. A. Aizerman. New problems in the general choice theory : Review of a research trend. *Social Choice and Welfare*, 2 :235–282, 1985.

[AL01a] A. Avron and I. Lev. A formula-preferential base for paraconsistent and plausible reasoning systems. In *"Inconsistency in Data and Knowledge" workshop (KRR-4) at the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'01)*, pages 60–70, 2001.

[AL01b] A. Avron and I. Lev. Formula-preferential systems for paraconsistent non-monotonic reasoning. In *International Conference on Artificial Intelligence (ICAI'01)*, pages 816–820, 2001.

[AM81] M. A. Aizerman and A.V. Malishevski. General theory of best variants choice : Some aspects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26 :1030–1040, 1981.

[Arr59] K. J. Arrow. Rational choice functions and orderings. *Economica*, 26 :121–127, 1959.

[Avr91] A. Avron. Natural 3-valued logics : characterization and proof theory. *The Journal of Symbolic Logic*, 56(1) :276–294, 1991.

[Bat98] D. Batens. Inconsistency-adaptive logics. In Ewa Orlowska, editor, *Logic at Work. Essays dedicated to the memory of Elena Rasiowa*. Springer-Verlag, 1998.

[BDP95] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. How to infer from inconsistent beliefs without revising ? In *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1449–1455, 1995.

[Bel77a] N. D. Belnap. How computers should think. In G. Ryle, editor, *Contemporary Aspects of Philosophy*, pages 30–56. Oriel Press, 1977.

[Bel77b] N. D. Belnap. A useful four-valued logic. In J.M. Dunn and G. Epstein, editors, *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, pages 7–37. Oriel Press, 1977.

[Bes88] P. Besnard. *An introduction to default logic*. Springer-Verlag, 1988.

[BG93] C. Boutilier and M. Goldszmidt. Revision by conditional beliefs. In *Proceedings of the 11th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pages 649–654. Morgan Kaufmann, 1993.

[BN05a] J. Ben-Naim. Pivotal and Pivotal-discriminative Consequence Relations. *Journal of Logic and Computation*, 15(5) :679–700, 2005.

[BN05b] J. Ben-Naim. Preferential and Preferential-discriminative Consequence Relations. *Journal of Logic and Computation*, 15(3) :263–294, 2005.

[BN06] J. Ben-Naim. Lack of Finite Characterizations for the Distance-based Revision. In *10th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'06), to appear*, 2006.

[Bou93] C. Boutilier. Revision sequences and nested conditionals. In R. Bajcsy, editor, *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 519–525. Morgan Kaufmann, 1993.

[Bou94] C. Boutilier. Unifying default reasoning and belief revision in a modal framework. *Artificial Intelligence*, 68 :33–85, 1994.

[Bou96] C. Boutilier. Iterated revision and minimal change of conditional beliefs. *Journal of Philosophical Logic*, 25(3) :262–305, 1996.

[Bra88] S. Brass. *Vervollständigungen für Logikdatenbanken (in German)*. PhD thesis, Techn. Univ. Braunschweig, 1988.

[Bre91] G. Brewka. Cumulative default logic : In the defense of nonmonotonic inference rules. *Artificial Intelligence*, 50(2) :183–205, 1991.

[Che54] H. Chernoff. Rational selection of decision functions. *Econometrica*, 26 :121–127, 1954.

[CLM99] W. A. Carnielli and M. Lima-Marques. Society semantics for multiple-valued logics. In W. A. Carnielli and I. M. L. D'Ottaviano, editors, *Advances in Contemporary Logic and Computer Science*, volume 235 of Contemporary Mathematics Series, pages 33–52. American Mathematical Society, 1999.

[CMdA00] W. A. Carnielli, J. Marcos, and S. de Amo. Formal inconsistency and evolutionary databases. *Logic and Logical Philosophy*, 8 :115–152, 2000.

[dACM02] S. de Amo, W. A. Carnielli, and J. Marcos. A logical framework for integrating inconsistent information in multiple databases. In Thomas Eiter and Berlin Klaus-Dieter Schewe, Springer-Verlag, editors, *Second International Symposium on Foundations of Information and Knowledge Systems*, pages 67–84, 2002.

[Dal88] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revisions : Preliminary report. In *Proceedings of the 7th National Conference on Artificial Intelligence*, pages 475–479, 1988.

[DdC70] I.M.L. D'Ottaviano and N.C.A. da Costa. Sur un problème de Jaśkowski, Sciences. In *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, volume 270, pages 1349–1353, 1970.

[DP94] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. In R. Fagin, editor, *Proceedings of the Fifth Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge*, pages 5–23. Morgan Kaufmann, Pacific Grove, CA, 1994.

[DP97] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Journal of Artificial Intelligence*, 89 :1–29, 1997.

[DS03] J. Delgrande and T. Schaub. On the relation between Reiter's default logic and its (major) variants. In *Seventh European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*, pages 452–463, 2003.

[DS05] J. Delgrande and T. Schaub. Expressing default logic variants in default logic. *Journal of Logic and Computation*, 15(4) :593–621, 2005.

[DSJ95] J. P. Delgrande, T. Schaub, and K. Jackson. Alternative approaches to default logic. *Artificial Intelligence*, 70(1-2) :167–237, 1995.

[Eps90] R.L. Epstein. *The Semantic foundation of logic. Vol. I : propositional logics*. Kluwer Academic Publisher, 1990.

[FH96] N. Friedman and J. Y. Halpern. Belief revision : A critique. In L. C. Aiello, J. Doyle, and S. Shapiro, editors, *Proceedings of the Fifth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 421–431. Morgan Kaufmann, 1996.

[FK88] C. Froidevaux and D. Kayser. Inheritance in semantic networks and default logic. In P. Smets, E. H. Mamdani, D. Dubois, and H. Prade, editors, *Non-Standard Logics for Automated Reasoning*, pages 179–212. Academic Press, London, 1988.

[FL94] M. Freund and D. Lehmann. Belief revision and rational inference. Technical Report 94-16, The Leibniz Center for Research in Computer Science, Institute of Computer Science, Hebrew University, 1994.

[FRS01] L. Forget, V. Risch, and P. Siegel. Preferential logics are X-logics. *Journal of Logic and Computation*, 11 :71–83, 2001.

[Fuh91] A. Fuhrmann. Theory contraction through base contraction. *Journal of Philosophical Logic*, 20 :175–203, 1991.

[G̈88] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux*. MIT press, 1988.

[Gab85] D. M. Gabbay. Theoretical foundations for non-monotonic reasoning in expert systems. In eds. K. R. Apt, editor, *Logics and Models of Concurrent Systems*, pages 439–457. Springer-Verlag, 1985.

[Gin88] M. L. Ginsberg. Multi-valued logics : a uniform approach to reasoning in ai. *Computer Intelligence*, 4 :256–316, 1988.

[GM88] P. Gärdenfors and D. Makinson. Revisions of knowledge systems using epistemic entrenchment. In M. Y. Vardi, editor, *Proceedings of the Second Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge*, pages 83–95. Morgan Kaufmann, 1988.

[Gro88] A. Grove. Two modellings for theory change. *Journal of Philosophical Logic*, 17 :157–170, 1988.

[Han69] B. Hansson. An analysis of some deontic logics. *N̂ous*, 3 :373–398, 1969. Reprinted in R. Hilpinen ed., *Deontic Logic : Introductory and Systematic Readings*. Reidel, Dordrecht 1971, pages 121-147.

[Han91] S. O. Hansson. Belief contraction without recovery. *Studia Logica*, 50(2) :251–260, 1991.

[Imi87] T. Imielinski. Results on translating defaults to circumscription. *Artificial Intelligence*, 32 :131–146, 1987.

[KL92] M. Kifer and E. L. Lozinskii. A logic for reasoning with inconsistency. *Journal of Automated Reasoning*, 9(2) :179–215, 1992.

[KLM90] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models, and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44(1-2) :167–207, 1990.

[KM91] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52 :263–294, 1991.

[KM92] H. Katsuno and A.O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In P. Gärdenfors, editor, *Belief Revision*, pages 183–203. Cambridge University Press, 1992.

[KM02] S. Konieczny and P. Marquis. Three-valued Logics for Inconsistency Handling. In *Proceedings of the 8th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA'02)*, pages 332–344. Springer-Verlag, 2002.

[Kon88] K. Konolige. On the relation between default and autoepistemic. *Artificial Intelligence*, (35) :343–382, 1988.

[Leh95] D. Lehmann. Belief revision, revised. In *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1534–1541. Morgan Kaufmann, 1995.

[Leh01] D. Lehmann. Nonmonotonic Logics and Semantics. *Journal of Logic and Computation*, 11(2) :229–256, 2001.

[Leh02] D. Lehmann. Connectives in Quantum and other Cumulative Logics. Technical report, ASL European Summer Meeting LC02, Muenster, Germany. Leibniz Center for Research in Computer Science TR-2002-28, 2002.

[Lew73] D. Lewis. Counterfactuals. *Basil Blackwell*, 1973.

[Lif85] V. Lifschitz. Computing circumscription. In *9th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 121–127, 1985.

[LM92] D. Lehmann and M. Magidor. What does a conditional knowledge base entail ? *Artificial Intelligence*, 55(1) :1–60, 1992.

[LMS01] D. Lehmann, M. Magidor, and K. Schlechta. Distance semantics for belief revision. *The Journal of Symbolic Logic*, 66(1) :295–317, 2001.

[Loz94] E. L. Lozinskii. Recovering contradictions : a plausible semantics for inconsistent systems. *Journal of Automated Reasoning*, 12 :1–31, 1994.

[LR91] S. Lindström and W. Rabinowicz. Epistemic entrenchment with incomparabilities and relational belief revision. *The Logic of Theory Change*, pages 93–126, 1991.

[LS90] F. Lin and Y. Shoham. Epistemic semantics for fixpoint nonmonotonic logics. In *TARK III*, 1990.

[Łuk88] W. Łukaszewicz. Considerations on default logic : An alternative approach. *Computational Intelligence*, 4(1) :1–16, 1988.

[Mak65] D. Makinson. The paradox of the preface. *Analysis*, 25 :205–207, 1965.

[Mak89] D. Makinson. General theory of cumulative inference. In M. Reinfrank, J. de Cleer, M. L. Ginsberg, and E. Sandewall, editors, *2nd International workshop on Non-monotonic reasoning*, pages 1–18. Springer-Verlag, 1989.

[Mak94] D. Makinson. General patterns in nonmonotonic reasoning. *Handbook of logic in artificial intelligence and logic programming : nonmonotonic reasoning and uncertain reasoning*, 3 :35–110, 1994.

[Mak03] D. C. Makinson. Bridges between classical and nonmonotonic logic. *Logic Journal of the IGPL*, pages 69–96, 2003.

[Mak05] D. C. Makinson. *Bridges from Classical to Nonmonotonic Logic*. London : King's College Publications, 2005.

[McC80] J. McCarthy. Circumscription — a form of non monotonic reasoning. *Artificial Intelligence*, 13(1-2) :27–39, 1980.

[McC86] J. McCarthy. Applications of circumscription to formalizing comonsense. *Artificial Intelligence*, 28 :89–116, 1986.

[McD82] D. McDermott. Nonmonotonic logic ii : Nonmonotonic model theories. *JACM*, 29 :33–57, 1982.

[MD80] D. McDermott and D. Doyle. Nonmonotonic logic i. *Artificial Intelligence*, (13) :41–72, 1980.

[Moo84] R. C. Moore. Possible-world semantics for autoepistemic logic. In *Non-monotonic Reasoning Workshop*, pages 344–354, 1984.

[Moo85] R. C. Moore. Semantical considerations on nonmonotonic logic. *Artificial Intelligence*, 25 :75–94, 1985.

[Mou85] H. Moulin. Choices functions over a finite set : A summary. *Social Choice and Welfare*, 2 :147–160, 1985.

[MT95] A. Mikitiuk and M. Truszczyński. Constrained and rational default logics. In *Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1509–1515. Morgan Kaufmann, 1995.

[NFPS96] A. Nayak, N. Y. Foo, M. Pagnucco, and A. Sattar. Changing conditional beliefs unconditionally. In Y. Shoham, editor, *Proceedings of the Sixth International Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*, pages 119–135. Morgan Kaufmann, 1996.

[Nie91] R. Niederée. Multiple contraction : A further case against Gärdenfors' principle of recovery. *The Logic of Theory Change*, pages 322–334, 1991.

[PH98] S. Parsons and A. Hunter. A review of uncertainty handling formalisms. *Applications of Uncertainty Formalisms. Lecture Notes in Artificial Intelligence No. 1455 (A. Hunter, S. Parsons eds.)*, 1998.

[Poo85] D. L. Poole. On the comparison of theories : Preferring the most specific explanation. In *9th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 144–147, 1985.

[Poo89] D. L. Poole. What the lottery paradox tells us about default reasoning (extended abstract). In *First International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, 1989.

[Pri91] G. Priest. Minimally inconsistent LP. *Studia Logica*, 50 :321–331, 1991.

[RC81] R. Reiter and G. Criscuolo. On interacting defaults. In *7th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 270–276, 1981.

[Rei78] R. Reiter. On closed world databases. *Logic and Databases (H. Gallaire, J. Minker, eds.)*, pages 55–76, 1978.

[Rei80] R. Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 13(1-2) :81–132, 1980.

[Rot01] H. Rott. *Change, Choice and Inference : A Study of Belief Revision and Nonmonotonic Reasoning*. Clarenton Press, Oxford UK (Oxford Logic Guides 42), 2001.

[Sch91] K. Schlechta. Theory revision and probability. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32(2) :307–319, 1991.

[Sch92a] T. Schaub. *Considerations on Default Logic*. PhD thesis, Technische Hochschule Darmstadt, FB Informatik, FG Intellektik, Alexanderstr., 1992.

[Sch92b] K. Schlechta. Some results on classical preferential models. *Journal of Logic and Computation*, 2(6) :675–686, 1992.

[Sch96] K. Schlechta. Some completeness results for stoppered and ranked classical preferential models. *Journal of Logic and Computation*, 6(4) :599–622, 1996.

[Sch00] K. Schlechta. New techniques and completeness results for preferential structures. *The Journal of Symbolic Logic*, 65(2) :719–746, 2000.

[Sch04] K. Schlechta. *Coherent systems*. Elsevier, 2004.

[Sen70] A. K. Sen. *Collective Choice and Social Welfare*. Holden-Day, San Francisco, CA, 1970.

[Sho87] Y. Shoham. A semantical approach to nonmonotonic logics. In *Tenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 388–392, 1987.

[Sho88] Y. Shoham. *Reasoning About Change*. MIT Press, Cambridge USA, 1988.

[Sie90] P. Siegel. A modal logic for non-monotonic logic. In *DRUMS Workshop*, 1990.

[SLM96] K. Schlechta, D. Lehmann, and M. Magidor. Distance Semantics for Belief Revision. In *Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge (TARK)*, pages 137–145, 1996.

[Spo88] W. Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic states. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, 2 :105–134, 1988.

[SS91] P. Siegel and C. Schwind. Hypothesis theory for nonmonotonic logic. In *1st International Workshop on Nonstandard Queries and Answers*, 1991.

[Sub90a] V. S. Subrahmanian. Mechanical proof procedures for many valued lattice-based logic programming. *Journal of Non-Classical Logic*, 7 :7–41, 1990.

[Sub90b] V. S. Subrahmanian. Paraconsistent disjunctive deductive databases. In *20th Int. Symp. on Multiple Logic*, pages 339–345. IEEE Press, 1990.

[Sub94] V. S. Subrahmanian. Amalgamating knowledge-bases. *ACM Transactions on Database Systems*, 19(2) :291–331, 1994.

[Tou87] D. S. Touretzky. Implicit ordering of defaults in inheritance systems. In M. L. Ginsberg, editor, *Readings in Nonmonotonic Reasoning*, pages 106–109. Kaufmann, Los Altos, CA, 1987.

[Tru91] M. Truszczyński. Modal interpretations of default logic. In *12th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 393–398, 1991.

[Urq01] A. Urquhart. Many-valued logic. In D. M. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic, second ed.*, volume 2, pages 249–295. Kluwer Academic Publishers, 2001.

[Wil94] M. A. Williams. Transmutations of knowledge systems. In J. Doyle, E. Sandewall, and P. Torasso, editors, *Proceedings of the Fourth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 619–629. Morgan Kaufmann, 1994.

[Win88] M. Winslett. Reasoning about action using a possible models approach. In *AAAI*, pages 89–93, 1988.

Autour de la Caractérisation de Raisonnements de Sens Commun en Présence d’Informations Incertaines

Résumé : L’essence de cette thèse est de produire des caractérisations (ou montrer l’inexistence de caractérisations) pour des familles de relations de conséquence et d’opérateurs de révision. Dans un premier temps, on s’intéressera à des relations de conséquence préférentielles (au sens de Kraus, Lehmann et Magidor) et pivotantes (au sens de Makinson). Ce sont des relations plausibles (les premières ne sont pas monotones, les secondes si) conçues pour traiter des informations incomplètes. On les étudiera dans des cadres paraconsistants tels que celui de la logique de Belnap, ce qui les rendra aussi utiles pour traiter des informations incohérentes. En seconde partie, on s’intéressera à une approche à la révision des croyances introduite par Lehmann, Magidor et Schlechta. Elle est basée sur des distances entre interprétations et présente l’avantage de définir des opérateurs de révision qui se comportent bien en cas d’itération.

Mots clefs : raisonnement de sens commun, logiques non-monotones, logiques préférentielles, logiques pivotantes, logiques paraconsistantes, logiques multi-valuées, révision des croyances, révision basée sur une distance.

On the Characterization of Common Sense Reasoning in the Presence of Uncertain Information

Abstract: The essence of the present thesis is to provide characterizations (or show the nonexistence of characterizations) for families of consequence relations and revision operators. First, we will investigate preferential consequence relations (in the sense of Kraus, Lehmann, and Magidor) and pivotal consequence relations (in the sense of Makinson). These are plausible relations (the former are non-monotonic, the latter are monotonic) conceived to deal with incomplete information. We will study them in paraconsistent frameworks such as the one of the logic of Belnap. This will render them useful to treat also inconsistent information. Second, we will investigate an approach to belief revision introduced by Lehmann, Magidor, and Schlechta. It is based on distances between valuations and has the advantage to define well-behaved iterated revision operators.

Keywords: common sense reasoning, non-monotonic logics, preferential logics, pivotal logics, paraconsistent logics, many-valued logics, iterated belief revision, distance-based revision.